Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă **10 puncte** din oficiu.
- Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\div\ x-1, 2x+1, 5x-1 \Leftrightarrow 2x+1=\frac{1}{2}(x-1+5x-1)$	**3p**
	Concluzie: $x=2$.	**2p**
2.	$\forall x\in(-2,2)\Rightarrow -x\in(-2,2)$	**1p**
	$f(-x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=-\ln\frac{2-x}{2+x}=-f(x), \forall x\in(-2,2)$	**3p**
	Concluzie: f este impară	**1p**
3.	$x^2-x-4>0,\ x-1>0,\ x-1\neq 1\ (*)$	**1.5p**
	$(*)\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},+\infty\right)$	**1.5p**
	$\log_{x-1}(x^2-x-4)=2\Leftrightarrow x^2-x-4=(x-1)^2, x\in\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},+\infty\right)$	**1p**
	Concluzie: $x=5$.	**1p**
4.	$T_{k+1}=C_{200}^k(x\sqrt{x})^k\left(\frac{4}{\sqrt[4]{x}}\right)^{200-k}, \forall k\in\mathbb{N}, k\le 200$	**1p**
	$(x\sqrt{x})^k\left(\frac{4}{\sqrt[4]{x}}\right)^{200-k}=4^{200-k}x^{\frac{7k}{4}-50}$	**2p**
	$\frac{7k}{4}-50=-1\Rightarrow k=28$	**1p**
	Concluzie: $T_{29}=C_{200}^{28}4^{172}\frac{1}{x}$	**1p**
5.	$ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow x_A+x_C=x_B+x_D,\ y_A+y_C=y_B+y_D$	**2p**
	$x_D=x_A+x_C-x_B=7$	**1p**
	$y_D=y_A+y_C-y_B=1$	**1p**
	Concluzie: $D(7,1)$	**1p**
6.	$\sin\alpha=\frac{2\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$	**3p**
	Concluzia: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M = xyz \ (**)$	**5p**
b)	$M^* M = (\det M) \cdot I_3$	**2p**
	$\det M^* \cdot \det M = (\det M)^3$	**1p**
	$x, y, z \in \mathbb{R}^* \overset{(**)}{\Longrightarrow} \det M \neq 0$	**1p**
	Concluzie: $\det M^* = (\det M)^2$	**1p**
c)	Intuirea formulei $M^n = \begin{pmatrix} x^n & x^n - y^n & x^n - y^n \\ 0 & y^n & y^n - z^n \\ 0 & 0 & z^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.	**2p**
	Demonstrarea formulei	**2p**
	Concluzia	**1p**
2.a)	$P(-2) = Q(-2) \Rightarrow 4m - 12 = 9m + 34$	**3p**
	$m = -\frac{46}{5}$	**1p**
	Concluzia: $[m] = -10$	**1p**
b)	$P - 3Q = (m - 18)X^2 + 24X + 6 - 27m$	
	$P(x_0) - 3Q(x_0) = 0 \Rightarrow (m - 18)x_0^2 + 24x_0 + 6 - 27m = 0$	**1p**
	Cazul 1: $\text{grad}(P - 3Q) = 1 \Rightarrow m = 18 \in \mathbb{Q}$	**1p**
	Cazul 2: $\text{grad}(P - 3Q) = 2$ $(m \neq 18)$	
	$P - 3Q$ are o singură rădăcină reală $\Leftrightarrow \Delta \equiv 12(9m^2 - 164m + 84) = 0$ (#)	**1p**
	$(\#) \Rightarrow m_{1,2} = \frac{82 \pm 4\sqrt{373}}{9} \notin \mathbb{Q}$	**1p**
	Concluzia: $m = 18$	**1p**
c)	$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $y_k = tx_k$, $k = 1, 2, 3$.	**2p**
	$-6 = y_1 + y_2 + y_3 = t(x_1 + x_2 + x_3) = -\frac{tm}{3} \Rightarrow mt = 18$ (1)	**0.5p**
	$-9 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = t^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -t^2 \Rightarrow t = \pm 3$ (2)	**0.5p**
	$-9m = y_1y_2y_3 = t^3(x_1x_2x_3) = -2t^3 \Rightarrow t^3 = \frac{9}{2}m$ (3)	**0.5p**
	$(1) + (2) + (3) \Rightarrow m = \pm 6$	**0.5p**
	Concluzie: $m = -6$ (pentru $m = 6$, P şi Q nu au toate rădăcinile reale)	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty \Rightarrow x=-1$ este asimptotă verticală	**1p**
	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x=0$ este asimptotă verticală	**1p**
	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$	**2p**
	Nu există asimptote oblice spre $\pm\infty$	**1p**
b)	$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$	**2p**
	$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	**3p**
c)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$	**1p**
	Remarcarea cazului de nedeterminare 1^∞	**1p**
	$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{n^2} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}}$	**2p**
	Concluzie: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{n^2} = e^{-1}$	**1p**
2.a)	$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$	**1p**
	$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \text{arctg x}\Big\|_0^1$	**2p**
	Concluzie: $I_0 = \frac{\pi}{4}$	**2p**
b)	$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}(nx+1)}{x^2e^{2nx}+1} dx, \forall n \in \mathbb{N}$	**1p**
	$e^{nx}(nx+1) = (xe^{nx})', \forall n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$	**1p**
	$I_n = \int_0^1 \frac{(xe^{nx})'}{(xe^{nx})^2+1} dx = \text{arctg}(xe^{nx})\Big\|_0^1 = \text{arctg}(e^n) < \frac{\pi}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$	**2p**
	$\text{arctg}(e^x)$ este o funcţie strict crescătoare pentru $x \in \mathbb{R} \Rightarrow I_n < I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$	**1p**
c)	Din b) rezultă că $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton şi mărginit, deci convergent	**2p**
	$\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} \text{arctg}(e^n) = \frac{\pi}{2}$	**3p**