Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” din Iaşi **Admitere - studii de licenţă**

Facultatea de Informatică **Sesiunea iulie 2018**

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi părţile imaginară şi reală ale numărului complex $z = \left(2 + i\sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - i\sqrt{2}\right)^2$.

5p **2.** Pentru ce valori ale parametrului real m vârful parabolei de ecuaţie $y = x^2 - 4x + m$ se găseşte pe dreapta de ecuaţie $y = x + 1$?

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+2) + 1 = \log_2(x^2 - 4)$.

5p **4.** Se alege la întâmplare un număr natural, impar, mai mic sau egal cu 30. Care este probabilitatea ca numărul ales să fie pătrat perfect?

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(3,1)$. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin originea axelor şi este paralelă cu dreapta care trece prin punctele A şi B.

5p **6.** Rezolvaţi ecuaţia $\sin x + \cos 2x = 1$ în intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie $M(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$ şi "$\cdot$" operaţia uzuală de înmulţire a matricilor.

5p **a)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $M(a)$ să nu fie inversabilă.

5p **b)** Să se arate că $M(a) \cdot M(b) = M(a + b - 2ab)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ astfel ca $M^2(x) = I_3$, unde I_3 este matricea unitate din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Ce relaţie există între a, b şi c dacă restul împărţirii lui f la $(X - 1)$ este 4?

5p **b)** Determinaţi a, b şi c, ştiind că $a + b + c = 1$ şi că i este o rădăcină a lui f (unde $i^2 = -1$).

5p **c)** Pentru valorile lui a, b şi c găsite mai sus, să se determine toate rădăcinile lui f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \in (-1, 0) \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

5p **a)** Studiaţi continuitatea funcţiei f pe întreg domeniul ei de definiţie.

5p **b)** Studiaţi derivabilitatea funcţiei f în punctul $x_0 = 0$.

5p **c)** Arătaţi că $f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in (-1, +\infty)$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2 + 1} dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Arătaţi că $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Studiaţi monotonia, mărginirea şi convergenţa şirului $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.