Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi — **Admitere - studii de licenţă**

Facultatea de Informatică — **Sesiunea iulie 2018**

Barem de corectare la MATEMATICĂ

- Se acordă **10 puncte** din oficiu.
- Pentru orice soluţie corectă, chiar diferită de cea din barem, se acordă un punctaj corespunzător.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2 \pm i\sqrt{2}\right)^2 = 2 \pm 4i\sqrt{2}$	**2p**
	$z = 4$	**1p**
	Concluzie: $Re(z) = 4, Im(z) = 0$.	**2p**
2.	Vârful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (2, m-4)$	**3p**
	V aparţine dreptei $y = x + 1 \Rightarrow m - 4 = 3$	**1p**
	Concluzie: $m = 7$.	**1p**
3.	$x + 2 > 0$ şi $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$	**2p**
	$\log_2(x^2 - 4) - \log_2(x + 2) = 1 \Leftrightarrow \log_2(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 2$	**2p**
	Concluzie: $x = 4$.	**1p**
4.	$P = \frac{f}{n}$	**1p**
	Mulţimea cazurilor posibile: $\{1, 3, \ldots, 29\} \Rightarrow n = 15$	**1.5p**
	Mulţimea cazurilor favorabile: $\{1, 9, 25\} \Rightarrow f = 3$	**1.5p**
	Concluzie: probabilitatea cerută este $P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.	**1p**
5.	Ecuaţia unei drepte prin origine: $y = mx$	**2p**
	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{2}$	**2p**
	Concluzie: $y = -\frac{1}{2}x$.	**1p**
6.	$\sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$	**2p**
	$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	**1p**
	$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	**1p**
	Concluzie: $\mathrm{x} \in \left\{0, \frac{\pi}{6}\right\}$.	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(a)$ nu este inversabilă $\Leftrightarrow$ $\det M(a) = 0$	**2p**
	$\det M(a) = 1 - 2a$	**2p**
	Concluzie: $a = \frac{1}{2}$	**1p**
b)	$M(a) \cdot M(b) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-b & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1-b \end{pmatrix}$	**1p**
	$M(a) \cdot M(b) = \begin{pmatrix} 1-a-b+2ab & 0 & a+b-2ab \\ 0 & 1 & 0 \\ a+b-2ab & 0 & 1-a-b+2ab \end{pmatrix}$	**3p**
	Concluzie: $M(a) \cdot M(b) = M(a+b-2ab)\ \forall a, b \in \mathbb{R}$.	**1p**
c)	$M^2(x) = M(2x-2x^2) = \begin{pmatrix} 1-2x+2x^2 & 0 & 2x-2x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x-2x^2 & 0 & 1-2x+2x^2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$M^2(x) = I_3 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$	**2p**
	Concluzie: $x \in \{0, 1\}$.	**1p**
2.a)	Restul împărţirii lui f la $(X-1)$ este $f(1)$	**2p**
	$f(1) = a + b + c + 3 = 4$	**2p**
	Concluzia: $a + b + c = 1$.	**1p**
b)	i este rădăcină a lui f $\Leftrightarrow$ $f(i) = 0$	**1p**
	$f(i) = 0 \Leftrightarrow (b-2)i + (1-a+c) = 0 \Leftrightarrow b = 2$ şi $a - c = 1$	**2p**
	Rezolvarea sistemului $a + b + c = 1, b = 2$ şi $a - c = 1$	**1p**
	Concluzia: $a = 0, b = 2, c = -1$.	**1p**
c)	$f = X^4 + 2X^3 + 2X - 1$	**1p**
	$f = (X^2+1)(X^2+2X-1)$	**2p**
	$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i$; $x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	f e continuă pe $(-1,+\infty)\setminus\{0\}$	**1p**
	$f_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(2x^2-1)=-1$	**1p**
	$f_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=-1$	**1p**
	$f_s(0)=f_d(0)=f(0)=-1 \Rightarrow f$ continuă în $x_0=0$	**1p**
	Concluzie: f e continuă pe $(-1,+\infty)$.	**1p**
b)	$f'_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}2x=0$	**2p**
	$f'_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{2x}{x^2+1}=0$	**2p**
	Concluzie: $f'_s(0)=f'_d(0)\Rightarrow f$ este derivabilă în $x_0=0$.	**1p**
c)	$\forall x\in(-1,0)\Rightarrow f(x)=2x^2-1\leqslant 1$	**2p**
	$\forall x\in[0,+\infty)\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\leqslant 1$	**2p**
	Concluzie $f(x)\leqslant 1$, $\forall x\in(-1,+\infty)$.	**1p**
2.a)	$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}\,dx$	**1p**
	$\displaystyle\int_0^1\frac{x^4}{x^2+1}\,dx=\int_0^1(x^2-1)\,dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right\|_0^1+\operatorname{arctg}x\,\|_0^1.$	**3p**
	Concluzie: $I_2=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}$.	**1p**
b)	$I_n+I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\,dx,\forall n\in\mathbb{N}^*$	**3p**
	Concluzie: $I_n+I_{n+1}=\dfrac{1}{2n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.	**2p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}(x^2-1)}{x^2+1}\,dx\leqslant 0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir monoton descrescător	**2p**
	$I_n\geqslant 0, I_{n+1}=\dfrac{1}{2n+1}-I_n\leqslant\dfrac{1}{2n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir mărginit	**2p**
	$(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir monoton şi mărginit $\Rightarrow$ şir convergent.	**1p**