

Test la MATEMATICĂ

Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați partea imaginară a numărului complex $\left[\frac{1}{(1+i\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(1-i\sqrt{2})^2} \right] (i^2 = -1)$.
- 5p 2. Pentru ce valori ale parametrilor reali m și n dreapta de ecuație $y = mx + n$ este tangentă la parabola de ecuație $y = x^2 + (m+n)x - m$ în punctul său de minim?
- 5p 3. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \log_2(x-1) = 0$.
- 5p 4. Se alege la întâmplare un număr x din mulțimea $\{1, 2, \dots, 100\}$. Care este probabilitatea ca $\log_2 x$ să fie un număr rațional?
- 5p 5. Se consideră punctele $A(3, 2)$ și $B(1, 0)$. Determinați coordonatele punctelor C situate pe dreapta $d : x + y = 5$ pentru care aria triunghiului ABC este 4.
- 5p 6. Pentru $x \in (0, \pi)$, determinați $\cos 3x$, știind că $\cos 2x = \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Fie $G = \left\{ A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & iy \\ 0 & 0 & 0 \\ iy & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$, unde $i^2 = -1$.
- 5p a) Demonstrați că (G, \circ) este grup comutativ ("o" notează înmulțirea matricilor).
- 5p b) Fie funcția $\varphi : (\mathbb{C}^*, \cdot) \rightarrow (G, \circ)$ definită prin $\varphi(x + iy) = A(x, -y)$, pentru orice $x + iy \in \mathbb{C}^*$. Arătați că φ este izomorfism de grupuri.
- 5p c) Calculați $A(0, -1)^{2017}$.
- 5p 2. Fie polinomul $f = X^3 + pX^2 + \widehat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.
- 5p a) Pentru ce valori ale lui $p \in \mathbb{Z}_3$, f se divide prin $X - \widehat{2}$?
- 5p b) Determinați valoarea expresiei $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f .
- 5p c) Pentru $p = \widehat{1}$, descompuneți f în factori ireductibili.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ și $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $g(x) = \frac{f(x)}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
- 5p a) Demonstrați că $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
- 5p b) Arătați că g este crescătoare pe tot domeniul de definiție.
- 5p c) Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = 2$ și $x_{n+1} = e^{x_n^2} - x_n^2 - 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Studiați monotonia și determinați limita acestuia.
- 5p 2. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x \sin^2 x$ și $g(x) = 2x \cos^2 x$.
- 5p a) Aflați câte o primitivă a funcțiilor f și g .
- 5p b) Calculați $I_n + J_n$, unde $I_n = \int_0^{1/n} f(x) dx$ și $J_n = \int_0^{1/n} g(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Determinați $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(J_n - I_n)$.