

Lambda calcul simplu tipizat

May 27, 2021

În această variantă a lambda-calculului tipizat, există următoarele tipuri:

1. tipul `Bool`;
2. (opțional) tipul `Nat`;
3. opțional alte tipuri de bază;
4. tipul *săgeată* (în engleză, *arrow type*): $T_1 \rightarrow T_2$ (unde T_1, T_2 sunt la rândul lor tipuri).

Tipurile sunt generate de gramatica

$$\begin{array}{l}
 T ::= Bool \\
 \quad | Nat \\
 \quad | T \rightarrow T.
 \end{array}$$

Gramatica pentru lambda-termeni este (conține și construcții opționale):

$$\begin{array}{l}
 t ::= x \\
 \quad | \lambda x : T. t \\
 \quad | t t \\
 \quad | true \\
 \quad | false \\
 \quad | if t then t elset \\
 \quad | zero \\
 \quad | succ t \\
 \quad | iszero t \\
 \quad | plus t t \\
 \quad | let x = t in t'.
 \end{array}$$

Un context de tipizare Γ conține perechi de forma $x : T$, unde x este un identificator și T este un tip. Formal, contextele de tipizare sunt stabilite de următoarea gramatică:

$$\begin{array}{l}
 \Gamma ::= \emptyset \\
 \quad | x : T, \Gamma.
 \end{array}$$

Un raționament de tip (engleză *typing judgement*) este de forma $\Gamma \vdash t : T$ (se citește: t are tipul T în contextul Γ) și poate fi construit folosind următoarele reguli de tipizare:

$$\begin{array}{c}
\text{T-ZERO} \frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} : \text{Nat}} \qquad \text{T-TRUE} \frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \qquad \text{T-FALSE} \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} \\
\\
\text{T-APP} \frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \rightarrow T_2 \quad \Gamma \vdash t_2 : T_1}{\Gamma \vdash t_1 t_2 : T_2} \qquad \text{T-VAR} \frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \\
\\
\text{T-LAM} \frac{\Gamma, x : T_1 \vdash t : T_2}{\Gamma \vdash \lambda x : T_1. t : T_1 \rightarrow T_2} \qquad \text{T-IF} \frac{\Gamma \vdash t_1 : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash t_2 : T \quad \Gamma \vdash t_3 : T}{\Gamma \vdash \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : T} \\
\\
\text{T-SUCC} \frac{\Gamma \vdash t : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ } t : \text{Nat}} \qquad \text{T-PLUS} \frac{\Gamma \vdash t_1 : \text{Nat} \quad \Gamma \vdash t_2 : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{plus } t_1 t_2 : \text{Nat}} \\
\\
\text{T-LET} \frac{\Gamma \vdash t : T \quad \Gamma, x : T_1 \vdash t' : T'}{\Gamma \vdash \text{let } x = t \text{ in } t' : T'}
\end{array}$$