



### Soluții

- Găsiți regula după care a fost construit șirul următor și determinați numărul care urmează:  
5, 15, 1115, 3115, 132115, 1113122115, ...

**Răspuns:** Numărul care urmează în șir este **311311222115**. Regula de formare a șirului este următoarea:

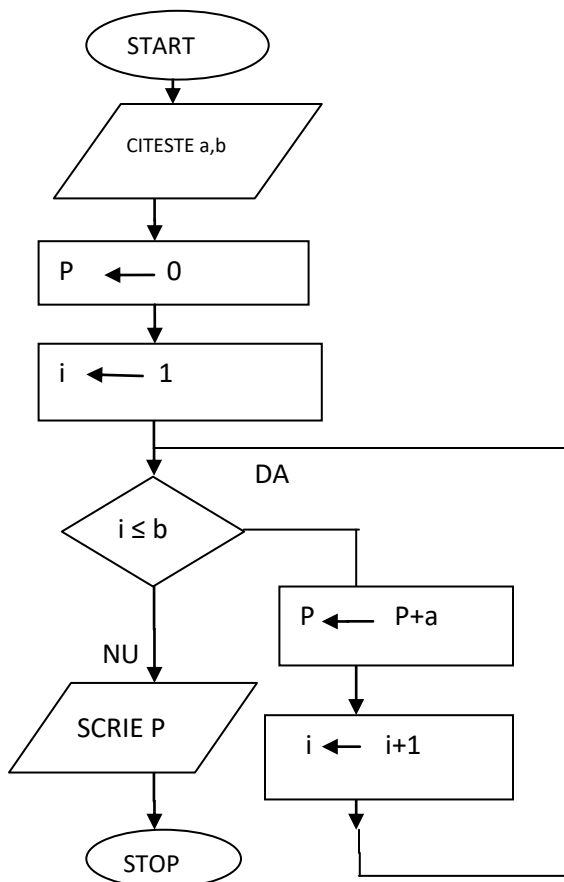
-primul termen din șir este **5**;

- fiecare termen următor **u** se obține din termenul precedent din șir, notat **p**, astfel: pentru fiecare cifră **c** din **u**, începând cu prima cifră, se completează în numărul **p** câte 2 cifre consecutive: prima dintre ele reprezintă numărul de cifre egale cu **c** consecutive și a doua cifră este cifra **c**.

Astfel, al doilea termen din șir care este egal cu **15** se obține din 5,  $c=5$  și apare 1 dată. Al treilea termen se obține din 15 (1 cifră de unu, 1 cifră de cinci) și este egal cu **1115**. Al patrulea termen se obține din 1115 (3 cifre de unu, 1 cifră de cinci) și este egal cu **3115**. Al cincilea termen se obține din 3115 (1 cifră de trei, 2 cifre de unu, 1 cifră de cinci) și este egal cu 132115. Al șaselea termen se obține din 132115 (1 cifră de unu, 1 cifră de trei, 1 cifră de doi, 2 cifre de unu, 1 cifră de cinci) și este egal cu 1113122115. Termenul din șir care trebuie determinat se obține din 1113122115 (3 cifre de unu, 1 cifră de trei, 1 cifră de unu, 2 cifre de doi, 2 cifre de unu, 1 cifră de 5) și este egal cu **311311222115**.

- Reconstituiți schema de mai jos, așezând blocurile alăturate în ordinea logică corectă astfel încât, urmând sensul săgeților de la START la STOP, să rezolve următoarea problemă: **Date fiind două numere naturale a și b ( $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ ), să se obțină produsul celor 2 numere, doar prin adunări repetate.**

**De exemplu, produsul  $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4$ .** Simbolul se citește "primește valoarea" (de exemplu:  $x \leftarrow x-y$  înseamnă că valoarea lui x se înlocuiește cu valoarea calculată pentru x-y).





3. Găsiți patru numere care au maxim două cifre care adunate să dea rezultatul 100, și nicio cifră să nu fie scrisă de două ori.

**Răspuns:** O soluție posibilă este  $100=18+20+53+9$

4. Într-o familie sunt mulți copii, printre care, Ana și Costel. Ana are un număr egal de frați și surori, iar Costel are de două ori mai multe surori decât frați. Câți copii sunt?

**Răspuns:** Notăm cu  $b$  numărul de băieți, cu  $f$  numărul de fete și rezultă  $f-1=b$ ,  $b-1=2f$  și se obține  $b=3$ ,  $f=4$ . În familie sunt 3 băieți și 4 fete, deci sunt **7 copii**.

5. Fie numărul :  $a = \overline{122333444455555} \dots 20 \dots 2020$ .

a) Câte cifre are numărul  $a$ ? b) Precizați cifra de pe locul 50 din numărul  $a$ .

**Răspuns:** a) Numărul  $a$  are **375 de cifre**.

Numărul are următoarele cifre în ordine: 1 de unu, 2 de doi, 3 de trei.... 9 de nouă (numere de câte o cifră) și numărul acestor cifre este egal cu  $n_1 = 1+2+3+\dots+9 = (9 \cdot 10) / 2 = 45$  cifre.

În numărul  $a$  urmează 10 de zece, 11 de unsprezece .... 20 de douăzeci (fiecare număr are acum 2 cifre) și numărul acestor cifre este egal cu  $n_2 = 2 \cdot (10 + 11 + \dots + 20) = 2 \cdot (20 \cdot 21 / 2 - 9 \cdot 10 / 2)$

$$n_2 = 2 \cdot (210 - 45) = 2 \cdot 165 = 330$$

Numărul  $a$  are un număr de cifre egal cu  $n_1 + n_2 = 330 + 45 = 375$

**b) Cifra de pe locul 50 din numărul  $a$  este 1.** Numărul  $a$  are 45 de cifre până la 122....99 și urmează încă 5 cifre 10101 deci cifra cerută este 1.

6. Scrieți numărul 7 folosind o singură dată numerele 2, 5, 6, 7 și 9 și doar operațiile de adunare, scădere, înmulțire și /sau împărțire și, în plus, oricâte paranteze doriți.

**Răspuns:** O soluție posibilă este  $7 = (9+7):2+5-6$

7. Suma cifrelor numărului  $\overline{abc}$  este 25. Calculați suma cifrelor numărului  $\overline{abc} + 2$ .

**Răspuns:** Să notăm  $x = \overline{abc}$ . Pentru că suma celor 3 cifre a numărului  $x$  este 25, rezultă că cea mai mică cifră a lui  $x$  este 7 (pentru  $x=799$  sau  $x=979$  sau  $x=997$ ), sau cea mai mică cifră a lui  $x$  este 8 (pentru  $x=889$  sau  $x=898$  sau  $x=988$ ). Astfel, suma cifrelor lui  $x+2$  este **9** (dacă  $x+2=799+2=801$  sau  $x+2=898+2=900$ ) sau suma cifrelor lui  $x+2$  este **18** (dacă  $x+2=889+2=891$  sau  $x+2=979+2=981$  sau  $x+2=988+2=990$ ) sau suma cifrelor lui  $x+2$  este **27** (pentru  $x+2=997+2=999$ ).

8. Alina scrie în ordine descrescătoare, numere de 5 cifre, care au cifrele scrise în ordine strict crescătoare și care nu au două cifre pare alăturate. Primele cinci numere pe care le-a scris sunt **56789, 45789, 45679, 45678, 36789**. Precizați care sunt următoarele **trei** numere, pe care le va scrie.

**Răspuns:** **35789, 35679, 35678**

9. Un elev completează o foaie de matematică ce are 2006 pătrățele astfel: un pătrățel cu A, două pătrățele cu B, trei pătrățele cu C, patru pătrățele cu D și cinci pătrățele cu E. Apoi, elevul repetă procedeul până completează toate pătrățelele.

a) De câte ori a repetat procedeul pentru a completa toată foaia?

b) Cu ce literă a fost completat ultimul pătrățel?



c) Câte pătrățele au fost completate cu C?

**Răspuns:**

- a) Se completează  $ABBCCDDDDDEEEEEABBCCC..$  și se repetă setul de  $1+2+3+4+5=15$  litere (1 A, 2 de B, 3 de C, 4 de D și 5 de E).  $2006=15 \cdot 133 + 11$ , deci setul de 15 litere se repetă de 133 ori și la cea de-a 134 repetare se folosesc 11 litere din cele 15. În total sunt **134** de repetări ale procedurii date.
- b) Ultimul pătrățel este completat cu cea de-a 11 literă din set care este **E**.
- c) Cu litera C s-au completat  $134 \cdot 3 = \mathbf{402}$  pătrățele

10. Adrian va primi o sumă de bani  $S$  ( $8 < S < 100$ ). El nu știe valoarea exactă a sumei  $S$ , dar dorește să cumpere cu acești bani cât mai multe pensoane și cutii de acuarele. Adrian are nevoie ca numărul de pensoane cumpărate să fie de două ori mai mare decât numărul cutiilor de acuarele. Știind că un penson costă 3 lei și o cutie de acuarele costă 5 lei, stabiliți câte pensoane și câte cutii de acuarele poate cumpăra cu suma  $S$ .

**Răspuns:** Dacă suma  $S < 11$ , nu poate cumpăra nimic. Pentru suma  $S$ , poate cumpăra cel mult  $[S/11]$  cutii de acuarele și  $2 \cdot [S/11]$  pensoane.

Dacă  $11 \leq S < 22$ , cumpără 2 pensoane și o cutie de acuarele. Dacă  $22 \leq S < 33$ , cumpără 4 pensoane și 2 cutii de acuarele. Dacă  $33 \leq S < 44$ , cumpără 6 pensoane și 3 cutii de acuarele. Dacă  $44 \leq S < 55$ , cumpără 8 pensoane și 4 cutii de acuarele. Dacă  $55 \leq S < 66$ , cumpără 10 pensoane și 5 cutii de acuarele etc. Dacă  $S=99$ , cumpără 18 pensoane și 9 cutii de acuarele.

11. Patru elevi pasionați de sport se înscriu la un concurs, la care pot participa la alegere la una din probele următoare: săritură în lungime, maraton, aruncarea greutății și ștafeta. Despre acești elevi știm următoarele:

- Ovidiu nu dă proba de săritură în lungime.
- Lui Pavel îi place maratonul și ștafeta, dar a ales altă probă.
- Radu preferă ștafeta deoarece a câștigat această probă la multe concursuri.
- Sandu ar susține orice probă numai maratonul nu.
- Fiecare elev alege altă probă față de probele alese de ceilalți trei elevi.

Ce probă va alege fiecare elev, la concurs?

**Răspuns:**

Elevii vor putea susține următoarele probe:

Soluția 1: Radu - ștafeta, Ovidiu - maraton, Pavel - săritură în lungime, Sandu - aruncarea greutății **sau**

Soluția 2: Radu - ștafeta, Ovidiu - maraton, Pavel - aruncarea greutății, Sandu - săritură în lungime

12. Aflați câte numere de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 6. Calculați suma cifrelor numerelor obținute.

**Răspuns:** 9 numere, suma cifrelor celor 9 numere este **60**. Numerele obținute au doar cifrele 1,2,3 sau 1,1,6; numerele sunt 123, 132, 213, 231, 312, 321, 116, 161, 611 și suma cifrelor  $1+2+3+1+3+2+2+1+3+2+3+1+3+1+2+3+2+1+1+1+6+1+6+1+6+1+1=60$

13. Un număr este **număr-vale** dacă, citit de la stânga la dreapta, cifrele sale sunt în ordine **strict descrescătoare** până la o poziție și **strict crescătoare** de la acea poziție până la sfârșit. De exemplu, numerele **753126**, **8419**, sunt numere-vale, iar **41712** sau **9873** nu sunt numere-vale. Determinați **cel mai mare număr-vale par** care se poate forma cu toate cifrele de 0, 4, 6, 7 și 9 care se găsesc în numerele de la 126 la 136.



**Răspuns: Cel mai mare număr-vale par este 976406**

Dintre cifrele  $\{0, 4, 6, 7, 9\}$  în numerele de la 126 și până la 136 se găsesc:

- o cifră de 0; o cifră de 4; două cifre de 6; o cifră de 7; o cifră de 9.

Cu toate aceste cifre, cel mai mare număr vale par care se poate forma este: **976406**

14. Gina spune: când tatăl meu avea 31 de ani, eu aveam 8 ani. Acum el are vârsta de două ori mai mare decât a mea. Câți ani are Gina acum?

**Răspuns:**

Diferența de vârstă dintre Gina și tatăl său este  $31-8=23$  ani. Notăm cu  $v$  vârsta actuală a Ginei și rezultă că vârsta tatălui ei este  $2 \cdot v$ . Diferența de vârstă dintre cei doi este  $v=23$  și rezultă că Gina are **23 de ani**.

15. Dacă  $n=1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1999$  aflați ultima cifră a numărului  $n$ .

**Răspuns:** Ultima cifră a numărului  $n$  este **2**. Observăm că numărul  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 12 \cdot 10$ . Ultima cifră a unui număr înmulțit cu 10 este 0. Fiecare dintre valorile  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7, \dots, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1999$  se obține prin înmulțire cu 10, deci fiecare se încheie cu 0. Rezultă că ultima cifră a lui  $n$  este egală cu ultima cifră a sumei  $2+6+4+0+0+\dots+0=2$

**Notă. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru: 2 ore.**