Serii trigonometrice

Vom studia clasa particulară de serii de funcții $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ cu $f_0(x) = a_0$, $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx, (n \geq 1), x \in \mathbf{R}$ cu $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbf{R}$, $(b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{R}$ numite **serii trigonometrice**. În acest scop vom prezenta unele proprietăți ale funcțiilor reale periodice.

Definiția VI.6.

Fie $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

1] f se numeşte **funcție periodică**, dacă există $T \neq 0$ a. î. $\forall x \in A$ să avem $x + T \in A$, $x - T \in A$ şi:

(VI.35) $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in A$ şi $T \neq 0$.

2] Numărul real $T_0 > 0$ cel mai mic posibil cu proprietatea $f(x + T_0) = f(x)$, $\forall x \in A$ se numeşte **perioada principală a funcției *f*** (**perioadă fundamentală a lui *f***).

Observații:

1) Dacă $T_0 > 0$ este perioadă principală, avem: $f(x + pT_0) = f(x)$, $\forall x \in A$ şi $\forall p \in \mathbf{Z}$.

2) **Exemple:**

1. $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ şi $g(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$ au perioada principală $T_0 = 2\pi$.

2. $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ şi $g(x) = \cos(\omega x + \varphi)$, cu $\omega, \varphi \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$ şi $x \in \mathbf{R}$ au perioada principală $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

3. $f(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$ şi $g(x) = \cos \frac{\pi x}{l}$, cu $l > 0$, fixat şi $x \in \mathbf{R}$ au perioada principală $T_0 = 2l$.

3) Dacă $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are perioada principală (fundamentală) $T_0 = 2\pi$, atunci $f\left(\frac{T_0 x}{2\pi}\right)$ are perioada principală $T_0 = 2\pi$ şi din acest motiv se vor considera funcții reale periodice cu $T = 2\pi$.

4) În problemele privind studiul funcțiilor trigonometrice vom considera clasa funcțiilor reale $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **continue pe orice interval compact din R şi cu limite laterale finite în orice punct (funcții local integrabile Riemann pe R) periodice cu T = 2π**. Pentru această clasă de funcții are loc egalitatea:

(VI.36) $$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \forall a \in \mathbf{R}.$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{a} + \int_{a}^{a+2\pi} + \int_{a+2\pi}^{\pi} \text{ şi} \int_{-\pi}^{a} + \int_{a+2\pi}^{\pi} = 0, (x = t - 2\pi)\right).$$

Exemple:

$f(x) = |\sin x|$ cu $x \in \mathbf{R}$ şi $g(x) = \begin{cases} e^x; x \in [0, \pi) \\ 0; x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ se pot prelungi prin periodicitate pe **R**.

5) Dacă f este o funcție periodică de perioadă $T \in \mathbf{R}^*$ şi pentru $\forall a \in \mathbf{R}$, avem $[a, a + T] \subset A$ ($f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$) atunci construim graficul lui f pe segmentul $[a, a + T]$ şi prin periodicitate, cu o translație pe Ox a graficului de pe intervalul $[a, a + T]$ se obține graficul lui f pe $A \subseteq \mathbf{R}$.

6) Dacă f, g: $A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcții periodice de perioadă $T \in \mathbf{R}^*$ comună, atunci funcțiile $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbf{R}^*$), $f - g$, fg, $\frac{f}{g}(g \neq 0 \text{ pe } A)$ sunt periodice pe A cu aceeaşi perioadă $T \neq 0$.

7) Dacă $f : A \to \mathbf{R}$ este periodică de perioadă $T \in \mathbf{R}^*$ şi integrabilă Riemann pe orice compact $[a, a + T] \subset A$ (f este local integrabilă pe A), atunci $\forall b \neq 0$, f este integrabilă Riemann pe compactul $[b, b + T] \subset A$ şi are loc egalitatea: (VI.37) $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$.

Definiția VI.7.

Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Funcția f se numeşte **funcție absolut integrabilă** pe $[a,b]$, dacă şi numai dacă, $|f|$ este integrabilă pe $[a,b]$.

Observații:

1. Dacă există $\int_a^b |f(x)|\,dx$, atunci există şi $\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Dacă există $\int_a^b f(x)\,dx$, nu există totdeauna şi $\int_a^b |f(x)|\,dx$. De exemplu, pentru $b = +\infty$ afirmața este valabilă ($\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergentă nu implică totdeauna $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ convergentă, în capitolul "**Integrale improprii**".)

Definiția VI.8.

Se numeşte **sistem trigonometric fundamental**, sistemul de funcții reale:

(VI.38) $\begin{cases} 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \\ x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$

în care toate funcțiile sunt periodice de perioadă principală (fundamentală) $T_0 \leq 2\pi$, $T_0 \neq 0$ cu excepția funcției $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Teorema VI.34.

Pentru $\forall n, m \in \mathbf{Z}$ pe compactul $[-\pi, \pi]$ au loc egalitățile:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0;$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, (n \geq 1).$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \begin{cases} \pi; n \geq 1 \\ 2\pi; n = 0 \end{cases};$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \begin{cases} \pi; n \geq 1 \\ 0; n = 0 \end{cases};$

$\left(\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)$ $\left(\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right);$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0;$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0;$

$$\left(\begin{array}{l} n, m \in \mathbf{N}, \ n \neq m \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right] \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} n, m \in \mathbf{N}, \ n \neq m \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right] \end{array} \right)$$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0;$

$$\left(\begin{array}{l} n, m \in \mathbf{N}, \ n \neq m \\ \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right] \end{array} \right)$$

Demonstrație:

Formulele (1) – (4) se obțin prin calcul direct plecând de la $\int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = 0$ și folosind formulele de calcul trigonometric convenabile pentru fiecare caz în parte.

Observație: Funcțiile cos *nx* și sin*nx* cu $x \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N} - \{0, 1\}$ admit o perioadă principală (fundamentală) $T_0 < 2\pi$ și anume $T_0 = \frac{2\pi}{n}$ ($n \geq 2$)

$$\left(\cos n \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) = \cos nx \text{ și } \sin n \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) = \sin nx, \forall x \in \mathbf{R}, n \geq 2 \right).$$

Definiția VI.9.

Fie $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbf{R}, (b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbf{R}$ două şiruri numerice oarecare.

1] Se numeşte **serie trigonometrică**, seria de funcții reale $\sum_{0}^{\infty} f_n$ cu

f_n: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $\begin{cases} f_0(x) = \dfrac{a_0}{2} \\ f_n(x) \underset{n\geq 1}{=} a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{cases}$ deci:

(VI.39) $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

2. Şirul de sume parțiale al seriei trigonometrice este:

(VI.40) $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

care este un şir de polinoame trigonometrice.

Vom studia convergența seriei trigonometrice (VI.39) pe un interval de lungime 2π, de exemplu [-π, π] şi prin periodicitate vom obține convergența pe **R**.

Teorema VI.35. (Teorema de convergență a seriei trigonometrice).

Fie dată seria trigonometrică (VI.39).

(i) Dacă seria trigonometrică (VI.39) este punctual cnvergentă pe [-π, π] (deci pe tot **R**) şi f : **R** → **R** este suma sa, atunci f este periodică de perioadă T = 2π.

(ii) Seria trigonometrică (VI.39) este uniform şi absolut convergentă pe **R**, dacă seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ este convergentă.

(iii) Dacă seria trigonometrică (VI.39) este uniform convergentă pe [-π, π], atunci f este continuă şi au loc relațiile:

$$\text{(VI.41)}\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx; \\ k \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b_k = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx; \\ k \geq 1 \end{cases}.$$

Demonstrație: (i) Avem: $S_0 = \dfrac{a_0}{2}, S_n = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

şi seria $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ este punctual convergentă pe [-π, π] cu suma f. Cum S_n sunt funcții periodice cu T = 2π, rezultă că $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ şi f este periodică $\left(\lim_{n\to\infty} S_n(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)$ de perioadă T = 2π.

(ii) Aplicând criteriul lui Weierstrass de la serii de funcții, avem:

$|f_n(x)| = |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|, \forall x \in \mathbf{R}$ şi $n \geq 1$ şi dacă:

$\sum_{1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ este convergentă $\Rightarrow$ $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ este uniform şi absolut convergentă pe **R**.

$$(iii)\begin{cases} \text{Daca } \dfrac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ este uniform convergenta pe } [-\pi, \pi] \\ f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \text{ cu } n \in \mathbf{N} \text{ şi } x \in \mathbf{R} \text{ sunt funcții continue pe } \mathbf{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ suma sa f este funcție continuă şi periodică cu T = 2π, deci f este continuă pe porțiuni pe orice compact din **R** de lungime 2π şi avem:

(VI.42) $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \forall x \in \mathbf{R}$.

Înmulțind (VI.42) cu funcțiile mărginite coskx şi respectiv sinkx, convergența uniformă se păstrează pe [-π, π] şi obținem:

$$(*)\begin{cases} f(x)\cos kx = \dfrac{a_0}{2}\cos kx + \sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx\right) \\ f(x)\sin kx = \dfrac{a_0}{2}\sin kx + \sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx\right) \end{cases}.$$

Integrând termen cu termen pe intervalul de uniformă convergență [-π, π] din (*) obținem:

$$\begin{cases} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{a_0}{2}dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\right]dx = \\ \qquad = \dfrac{a_0}{2}2\pi + \sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) = \pi a_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \dfrac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx\right)\right]dx = \\ = \sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kxdx}_{\overset{\|(2)}{\pi, k=n\geq 1}} + b_n \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kxdx}_{\overset{\|(4)}{0}}\right) = \pi a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \dfrac{a_0}{2}\underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx}_{\overset{\|(1)}{0}} + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx\right)\right]dx = \\ = \sum\limits_1^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kxdx}_{\overset{\|}{0}} + b_n \underbrace{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kxdx}_{\overset{\|\ k=n\geq 1}{\pi}}\right) = \pi b_n \end{cases}$$

$$\text{(VI.41')}\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \\ n \geq 1 \end{cases}; \begin{cases} b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \\ n \geq 1 \end{cases}$$

şi s-au obţinut formulele pentru calculul lui a_n şi b_n.

Serii Fourier. Aplicaţii.

Definiţia VI.10.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe orice compact din **R** şi care are limite laterale finite în orice punct, în plus f periodică cu perioada principală (fundamentală) T = 2π.

1] Şirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 1}$ date prin formulele (VI.41') se numesc **coeficienţi Fourier ai funcţiei *f*.**

2] Seria trigonometrică de forma (VI.42) în care $a_n\,(n \geq 0)$ şi $b_n\,(n \geq 1)$ sunt coeficienţii Fourier ai lui f se numeşte **serie Fourier asociată funcţiei *f*** şi notăm:

(VI.43) $f(x) \cong \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ cu:

$$\text{(VI.41')}\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, (n \geq 0) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, (n \geq 1) \end{cases}.$$

Observaţii:

1. În relaţia (VI.43) avem egalitate pentru $\forall x \in \mathbf{R}$ dacă s-a demonstrat că seria Fourier asociată **funcţiei generatoare *f*** este convergentă (punctual, uniform) şi are ca sumă chiar funcţia f.

2. Dacă $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ este o funcţie local integrabilă (sau chiar continuă pe porţiuni) şi are proprietatea:

f funcţie pară (graficul lui f simetric faţă de Oy) $\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

şi *f* funcţie impară (graficul lui *f* simetric faţă de O(0,0))$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

3. Dacă *f* este funcţie local integrabilă (sau continuă pe porţiuni şi cu limite laterale finite în orice punct) şi periodică de perioadă T= 2π, în plus are proprietatea:

$$\begin{cases} f \text{ funcţie pară} \Rightarrow \begin{cases} f(x)\cos kx \text{ funcţie pară} \Rightarrow a_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx; (k \geq 1) \\ f(x)\sin kx \text{ funcţie impară} \Rightarrow b_k = 0; (k \geq 1) \end{cases} \\ f \text{ funcţie impară} \Rightarrow \begin{cases} f(x)\cos kx \text{ funcţie impară} \Rightarrow a_k = 0; (k \geq 0) \\ f(x)\sin kx \text{ funcţie pară} \Rightarrow b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx; (k \geq 1); \end{cases} \end{cases}$$

4. **Legătura dintre funcţia *f*: R → R local integrabilă Riemann** (sau continuă pe orice compact din **R** cu limite laterale finite în orice punct) pe **R** şi periodică cu T = 2π şi **seria Fourier asociată** exprimată în formula (VI.43) este doar o "**legătură de asociere**". Seria Fourier asociată lui *f* poate fi: divergentă, punctual convergentă cu suma *f* sau altă funcţie, uniform convergentă.

5. Vom demonstra o teoremă de reprezentare a unor clase speciale de funcţii reale ca sume de serii trigonometrice şi în particular, de serii Fourier. ([40], pag. 443-456).

Definiţia VI.11.

Fie *f*, *g* : **R** → **R** local integrabile pe **R** (sau continue pe orice interval compact din **R** şi cu limitele laterale finite în orice punct) periodice cu perioada T = 2π. Se numeşte **produsul de convoluţie al funcţiilor *f* şi *g*** sau **convoluţia lui *f* cu *g***, notat $f * g$ şi definit prin:

(VI.44) $(f*g)(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$

Observație:

1. Se verifică prin calcul direct următoarele proprietăți ale convoluției a două funcții:

(c_1) $f*g=g*f$ (c_2) $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$

pentru $\forall f, g, h$:**R**→**R** care satisfac condițiile din definiția VI.11.

Teorema VI.36.

Fie f : **R** → **R** (local integrabilă pe **R**) periodică cu perioada T = 2π, **continuă pe porțiuni pe orice compact din R şi cu limitele laterale finite în orice punct** şi $S_n(x)$ suma parțială a seriei Fourier asociată lui f (VI.43). Pentru $\forall x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$ şi $\forall n \in \mathbf{N}$, notăm **nucleul lui Dirichlet:**

(VI.45) $D_n(x)=\dfrac{\sin\left(nx+\dfrac{x}{2}\right)}{2\pi\sin\dfrac{x}{2}}$

şi atunci avem:

(VI.46) $S_n(x)=(f*D_n)(x), \forall n\geq 0$.

Demonstrație: Pentru $\forall\ x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}$, prin inducție după n, folosind formulele de calcul din trigonometrie, se arată că are loc egalitatea:

(**) $1+2\cos x+2\cos 2x+...+2\cos nx=\dfrac{\sin\left(nx+\dfrac{x}{2}\right)}{\sin\dfrac{x}{2}}$ şi atunci avem:

(VI.45') $\begin{cases} D_n(x)=\dfrac{1}{2\pi}\left(1+\sum\limits_{k=1}^{n} 2\cos kx\right). \\ \forall x \in \mathbf{R} - 2\pi\mathbf{Z}, \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$

Seria Fourier asociată lui *f*, (VI.43), are sumele parțiale:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^n\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\overset{(\text{VI.41}')}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt\overset{(\text{VI.45}')}{=}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\,dt\overset{(\text{VI.44})}{=}$$

$$=(f*D_n)(x),\forall n\ge 0,\forall x\in\mathbf{R}\text{-}2\pi\mathbf{Z}\Rightarrow S_n(x)\equiv(f*D_n)(x),\forall n\ge 0,\forall x\in\mathbf{R}\text{-}2\pi\mathbf{Z}$$

Teorema VI.37 (Lema lui Riemann)

Fie *f*: $[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă pe porțiuni pe compactul $[a,b]$, atunci avem:

$$(\text{VI.47})\quad\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos kx\,dx=0\\ \lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin kx\,dx=0\end{cases}.$$

Demonstrație: Presupunem că *f*: $[a,b]\to\mathbf{R}$ este o **funcție în scară** (în particular *f* este o funcție simplă), deci există o divizare $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\Delta=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ a. î. $f(x)=c_i$ (constant), $\forall x\in(x_{i-1},x_i)$ cu $i=1, 2, ..., n$. În această ipoteză, avem:

$$\begin{cases}\int_a^b f(x)\cos kx\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}c_i\cos kx\,dx=-\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\sin kx_i-\sin kx_{i-1}}{k}\\ \int_a^b f(x)\sin kx\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}c_i\sin kx\,dx=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{\cos kx_i-\cos kx_{i-1}}{k}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left|\int_a^b f(x)\cos kx dx\right| \le \frac{2}{k}\sum_{i=1}^n |c_i| \\ \left|\int_a^b f(x)\sin kx dx\right| \le \frac{2}{k}\sum_{i=1}^n |c_i| \end{cases}$$ şi prin trecerea la limită pentru $k \to \infty$ se obţin

relaţiile (VI.47). După teorema lui Cantor *f*: $[a,b] \to \mathbf{R}$ funcţie continuă pe compactul $[a,b] \subset \mathbf{R}$ este uniform continuă pe $[a,b]$ şi se poate demonstra afirmaţia: "orice funcţie continuă *f*: $[a,b] \to \mathbf{R}$ este limita unui şir uniform convergent de funcţii în scară" ([42] pag. 169 - 170).

În aceste condiţii, $\forall \varepsilon > 0$ fixat alegem o funcţie în scară φ: $[a,b] \to \mathbf{R}$ a. î. $\| f - \varphi \| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ şi avem:

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)\cos kx dx = \int_a^b \varphi(x)\cos kx dx + \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\cos kx dx \\ \int_a^b f(x)\sin kx dx = \int_a^b \varphi(x)\sin kx dx + \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\sin kx dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left|\int_a^b f(x)\cos kx dx\right| \le \left|\int_a^b \varphi(x)\cos kx dx\right| + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)||\cos kx| dx < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \varepsilon \\ \left|\int_a^b f(x)\sin kx dx\right| \le \left|\int_a^b \varphi(x)\sin kx dx\right| + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)||\sin kx| dx < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\cos kx dx = 0 \\ \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sin kx dx = 0 \end{cases}.$$

Consecința VI.10.

Pentru orice funcție *f*: **R** → **R** (local integrabilă pe **R**) *f* continuă pe porțiuni pe orice compact din **R** şi cu limite laterale finite în orice punct, periodică cu T = 2π, atunci şirurile coeficienților Fourier

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, (n \geq 0)$ şi $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, (n \geq 1)$ converg la zero în **R**, deci: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Demonstrația este o consecință directă din lema lui Riemann (teorema VI.37).

Teorema VI.38. (Teorema lui Dirichlet de reprezentare a unei funcții reale printr-o serie Fourier)

Fie *f*: **R** → **R** o funcție (local integrabilă Riemann) **continuă pe porțiuni pe orice compact din R şi cu limite laterale finite în orice punct, periodică cu perioada T = 2π**. Dacă *f* este derivabilă pe porțiuni cu derivatele laterale finite în orice punct, atunci seria Fourier, asociată lui *f* (VI.43), este punctual convergentă pe **R** şi suma acestei serii este funcția:

(VI.48) $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$

Demonstrație: Vom preciza în cele ce urmează conceptele: "funcție continuă pe porțiuni pe $[a,b] \subset \mathbf{R}$" şi "funcție derivabilă pe porțiuni pe $[a,b] \subset \mathbf{R}$".

Definiția VI.12.

Fie $f:[a,b]\subset \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\Delta=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$ iar $I_k=(x_{i-1},x_i)$ intervale parțiale deschise ale lui Δ ($k=\overline{1,n}$).

1] Funcția f **este o funcție continuă pe porțiuni pe** $[a,b]$, dacă f este continuă pe fiecare interval parțial (x_{i-1},x_i) ($i=\overline{1,n}$) şi are limitele laterale finite în orice punct din $[a,b]$.

2] Funcția ***f*** **este o funcție derivabilă pe porțiuni pe** $[a,b]$ dacă f este derivabilă pe fiecare interval parțial (x_{i-1},x_i) ($i=\overline{1,n}$) şi are derivate laterale finite în orice punct din $[a,b]$.

3] Funcția f **este o funcție netedă pe** $[a,b]$ dacă $f\in C^1([a,b])$ şi $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$. Funcția f **este o funcție netedă pe porțiuni pe** $[a,b]$, dacă f este netedă pe fiecare interval parțial (x_{i-1},x_i) ($i=\overline{1,n}$) şi are derivate laterale finite în orice punct din $[a,b]$.

Observații:

1. Dacă f este continuă pe porțiuni $[a,b]$, atunci f are un număr finit de puncte de discontinuitate numai de specia a I-a în $[a,b]$.

2. O funcție discontinuă este funcție netedă pe porțiuni pe $[a,b]$, dacă şi numai dacă, funcția este netedă pe porțiuni pe $[a,b]$ şi are un număr finit de puncte de discontinuitate numai de specia a I-a în $[a,b]$.

Demonstrația teoremei lui Dirichlet (teorema VI.38)

Vom nota în demonstrație pentru $\forall x \in \mathbf{R}$ fixat valoarea lui $S(x)$ prin $\alpha = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\left(=S(x)\right)$. Conform ipotezelor din teoremă, $\forall [a,b] \subset \mathbf{R}$ un compact fixat, atunci există $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ a. î. funcția f este derivabilă pe fiecare interval parțial $(x_{i-1}, x_i)\left(i=\overline{1,n}\right)$ şi în punctele lui Δ în număr finit are derivate laterale finite. Demonstrația se prezintă pe etape.

Etapa 1 în care se va evalua produsul de convoluție: $D_n * (f-\alpha)$. Pentru $\forall x \in \mathbf{R}$ fixat, conform definiției operației "$*$", avem:

$$\left[D_n * (f-\alpha)\right](x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x-t)-\alpha\right]D_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \quad \text{cu } 0<\delta<\pi$$

şi notate $I_1 = \int_{-\pi}^{-\delta}$, $I_2 = \int_{-\delta}^{\delta}$, $I_3 = \int_{\delta}^{\pi}$. Cum f este derivabilă pe porțiuni şi are derivate laterale finite în orice punct, atunci există $c>0$ a. î.

$\left|f(y)-f(x-0)\right| \le c|y-x|; \left|f(y)-f(x+0)\right| \le c|y-x|$ unde y este suficient de aproape de x. Evaluăm $I_2 = \int_{-\delta}^{\delta}$ astfel:

$$|I_2| = \int_{-\delta}^{\delta}\left|f(x-t)-\alpha\right|\frac{\left|\sin\left(nt+\frac{t}{2}\right)\right|}{2\pi\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt \le \int_{-\delta}^{\delta}\frac{c|t|}{2\pi\left|\sin\frac{t}{2}\right|}dt \text{ deoarece avem:}$$

$$\left|f(x-t)-\alpha\right| = \left|f(x-t)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|f(x-t)-f(x-0)+f(x-t)-f(x+0)\right| \le \frac{1}{2}\left(c|t|+c|t|\right) = c|t|$$

Notăm: $M = \sup\limits_{|t|\le\delta} \dfrac{|t|}{\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}$ şi avem: $|I_2| \le \dfrac{c}{2\pi}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \dfrac{|t|}{\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|} \le \dfrac{c\cdot M\cdot\delta}{\pi}$.

Etapa 2 în care se va dovedi că $\lim\limits_{n\to\infty}\left[D_n * (f-\alpha)\right](x) = 0, \forall x\in\mathbf{R}$ fixat.

Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} I_1 = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} I_2 = 0$ folosind relațiile (VI.47) din lema lui Riemann. Avem:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{-\delta}\left[f(x-t)-\alpha\right]D_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{-\delta}\left[f(x-t)-\alpha\right]\frac{\sin\left(nt+\dfrac{t}{2}\right)}{2\pi\sin\dfrac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta}\frac{f(x-t)-\alpha}{2\pi\sin\dfrac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2}\cos nt + \cos\frac{t}{2}\sin nt\right]dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\delta}\left[g_1(t)\cos nt + g_2(t)\sin nt\right]dt$$

cu $g_1(t) = \dfrac{f(x-t)-\alpha}{2\pi}$ şi $g_2(t) = \dfrac{f(x-t)-\alpha}{2\pi}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$

funcții continue pe porțiuni şi după (VI.47) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_1 = 0$. La fel,

$$I_3 = \int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x-t)-\alpha}{2\pi\sin\dfrac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2}\cos nt + \cos\frac{t}{2}\sin nt\right]dt = \int_{\delta}^{\pi}\left[g_1(t)\cos nt + g_2(t)\sin nt\right]dt$$

şi după (VI.47) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_3 = 0$. Pentru $I_2 = \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta}$ nu se poate aplica teorema lui Riemann deoarece $t = 0$ este punct singular pentru funcția $\left[f(x-t)-\alpha\right]\sin\dfrac{t}{2}$. Am arătat că $|I_2| \le \dfrac{cM\delta}{\pi}$ şi alegem $n\in\mathbf{N}$ suficient de mare şi $\delta > 0$ suficient de mic, adică $\forall\varepsilon>0$ alegem $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ a. î. $\forall n \ge n_\varepsilon \Rightarrow$

$|I_1| < \dfrac{\varepsilon}{3}, |I_3| < \dfrac{\varepsilon}{3}$; apoi alegem $\delta(\varepsilon) > 0$ a. î. $\dfrac{cM\delta}{\pi} < \varepsilon \Rightarrow$

$\left|\left[D_n * \left(f-\alpha\right)\right]\left(x\right)\right| < \varepsilon$ pentru $\forall n \geq n_\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} D_n * \left(f-\alpha\right) = 0$ pe **R**.

Etapa 3. Pentru $\forall x \in$ **R**, avem:

$$\left[D_n * \left(f-\alpha\right)\right]\left(x\right) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\left[f\left(x-t\right)-\alpha\right]dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f\left(x-t\right)dt - \alpha\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt \overset{\text{(VI.45')}}{=} \left(D_n * f\right)\left(x\right) - \alpha\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right]dx =$$

$$= \left(D_n * f\right)\left(x\right) - \alpha = S_n\left(x\right) - \alpha; \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = 0_{\ k=1,2,\ldots n}\right).$$

Cum am dovedit că $\lim\limits_{n\to\infty} D_n * \left(f-\alpha\right) = 0$ pe $\mathbf{R} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n\left(x\right)-\alpha\right] = 0 \Rightarrow S_n \xrightarrow[\mathbf{R}]{\text{pc}} \alpha = \frac{f\left(x-0\right)+f\left(x+0\right)}{2}.$$

Consecința VI.11.

Dacă f : **R** $\to$ **R** este o funcție periodică, continuă, derivabilă pe porțiuni, atunci seria Fourier (VI.43) asociată lui f este punctual convergentă cu suma f.

Demonstrația rezultă direct din teorema lui Dirichlet (teorema VI.38).

Consecința VI.12.

Dacă f : **R** $\to$ **R** este o funcție continuă, periodică cu perioada $T = 2\pi$, derivabilă pe porțiuni având toți coeficienții Fourier nuli ($a_n = 0$ $\forall n \in$ **N** şi $b_n = 0$, $\forall n \in$ **N***), atunci $f \equiv 0$ pe **R** ($f(x) = 0$, $\forall x \in$ **R**).

Observații:

1. Dacă în definiția VI.12 a unei funcții periodice f, continuă pe porțiuni şi care are limite laterale finite în orice punct (f local integrabilă), dar presupunem că perioada principală (fundamentală) este $T_0 = 2l$ cu $l > 0$,

atunci rămân valabile toate rezultalele obținute pentru această clasă de funcții periodice.

2. În acest caz, coeficienții Fourier sunt dați prin:

(VI.49) $$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{k\pi x}{l}dx \\ k \geq 0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} b_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{k\pi x}{l}dx \\ k \geq 1 \end{cases}.$$

3. În acest caz, teorema lui Dirichlet (teorema (VI.38)) afirmă că avem:

(VI.50) $$\begin{cases} S(x) = \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l} + b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right) \\ x \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

4. Vom compara, cele două clase particulare de serii de funcții: seriile de puteri şi seriile trigonometrice.

Seriile de puteri sunt mai uşor de folosit în aplicații, deoarece sumele lor parțiale sunt polinoame algebrice şi pe mulțimea de convergență suma lor este o functie de clasă C^{∞}. Un aspect negativ este faptul că o funcție reală de o variabilă reală, în general, nu poate fi reprezentată de o serie de puteri pe întreg domeniul său de definiție.

Exemplu: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x \in \mathbf{R}$ şi $f \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ are o dezvoltare în serie de puteri: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ pe (-1, 1).

Seriile trigonometrice au sumele parțiale polinoame trigonometrice şi reprezentarea funcțiilor prin serii Fourier are loc pe orice interval din **R.** Seriile trigonometrice au aspecte negative, în ceea ce priveşte proprietățile de derivare termen cu termen şi de integrare termen cu termen, care se pot aplica numai în condiții suplimentare mult mai restrictive.

5. Dacă f este integrabilă pe [-π, π] i se poate asocia seria Fourier (VI.43) în legătură cu care se pun următoarele probleme:

I. O serie Fourier este totdeauna convergentă pe [-π, π] ? Dacă seria Fourier este divergentă ce proprietăți suplimentare ale funcției generatoare f asigură convergența seriei Fourier asociată lui f ?

II. Ce proprietăți ale funcției f implică convergența uniformă a seriei Fourier asociată ?

III. Dacă seria Fourier asociată lui f este convergentă pe [-π, π] în ce caz, are ca sumă chiar suma f ? Dacă suma nu este f, care sunt proprietățile suplimentare ale funcției generatoare f care asigură faptul că f este suma seriei Fourier asociată ?

IV. Dată o serie trigonometrică, există o funcție integrabilă pe [-π, π] care admite seria dată ca serie Fourier ?

V. Două funcții distincte f şi g integrabile pe [-π, π] pot avea aceeaşi serie Fourier ?

VI. În ce condiții o funcție definită pe [-π, π] este suma unei serii trigonometrice convergente ?

6. Răspunsul parțial la aceste probleme a fost dat prin teorema lui Dirichlet (teorema VI.38) şi consecința VI.11. În cadrul "**Teoriei Integralei Lesesgue pe $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 1$)**" se vor da cele mai multe rezultate privind problemele I – VI enumerate mai sus.

7. Vom enunța fără demonstrație ([35], [38], [40], [42]) alte afirmații care precizează convergența seriei Fourier şi legătura ei cu funcția generatoare.

Teorema VI.39.

Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este integrabilă Riemann pe orice compact din $\mathbf{R}$ şi periodică cu $T \leq 2\pi$ poate fi dezvoltată într-o serie trigonometrică (VI.39) uniform convergentă pe **R**, atunci această serie trigonometrică coincide cu seria Fourier (VI.43) asociată lui *f* pe **R**.

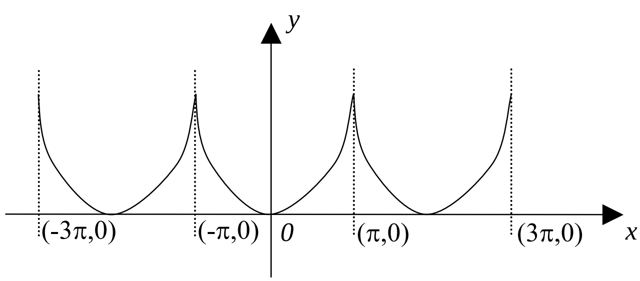
Demonstrația se obține direct, aplicând proprietatea că o serie uniform convergentă de funcții reale cu suma o funcție continuă se poate integra termen cu termen; vom deduce că $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; (n \geq 0)$ şi $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx; (n \geq 1)$ şi atunci (VI.41) coincide cu (VI.43).

Teorema VI.40.

Dacă f : **R** $\rightarrow$ **R** este absolut integrabilă pe **R**, periodică cu T $\leq 2\pi$ şi admite o dezvoltare în serie trigonometrică (VI.39) convergentă cu suma *f* pe orice interval de lungime 2π, cu excepția eventual a unui număr finit de puncte, atunci această serie trigonometrică este seria Fourier (VI.43) asociată lui *f* ([35], [38], [40], [42]).

Teorema VI.41.

Dacă f : **R** $\rightarrow$ **R** este funcție continuă pe orice I $\subset$ **R** de lungime 2π şi periodică cu T $\leq 2\pi$, atunci seria Fourier (VI.43) asociată lui *f* este uniform şi absolut convergentă pe I cu suma *f* ([35], [38], [40], [42]).



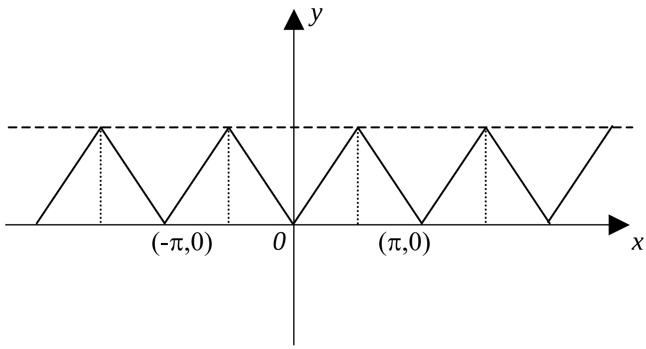
Exemple: 1) $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$. *f* este continuă şi netedă pe porțiuni pe **R**, *f* este funcție pară, deci avem:

$b_n = 0$ $(n \geq 1)$ şi $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{3\pi^2}{2}, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, (n \geq 1)$

$$x^2 \cong \frac{\pi^2}{2} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right), x \in [-\pi, \pi]$$

(Seria Fourier cu $\left|f_n(x)\right| = \left|(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx\right| \leq \frac{4}{n^2}$ şi $\sum_1^{\infty} \frac{4}{n^2}$ convergentă, este uniform şi absolut convergentă la f).

2) $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$ f este continuă, netedă pe porţiuni pe **R**, şi funcţie pară, deci avem: $b_n = 0$ ($n \geq 1$);

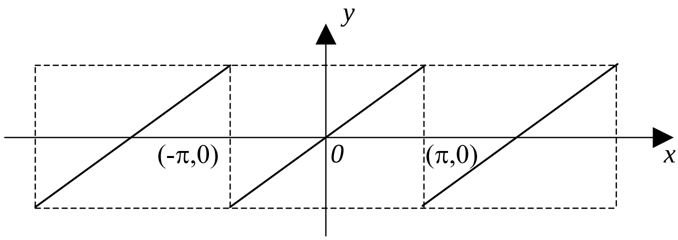


$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx = \begin{cases} 0, n = 2k \\ \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2}; n = 2k+1 \end{cases}.$$

$$x \cong \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right), x \in [-\pi, \pi].$$

(Seria Fourier cu:

$\left|f_{2n+1}(x)\right| = \left|\frac{-4\cos(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2}\right| \leq \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$ şi $\sum_1^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$ convergentă, este uniform şi absolut convergentă). În $x = 0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.



3) $f(x)=x, x\in(-\pi,\pi)$ f este continuă pe porţiuni, netedă pe porţiuni şi impară pe **R**, deci avem:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0, a_n=0, n\geq 1; b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$x\cong 2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, x\in(-\pi,\pi).$$

4) $f(x)=e^x$ este dezvoltabilă în serie Fourier pe [-π, π] . Vom asocia lui f funcţia: $f_1(x)=\begin{cases} f(x); x\in(-\pi,\pi] \\ e^{\pi}; x=-\pi \end{cases}$ şi apoi o prelungim pe f_1 pe **R** prin periodicitate. Funcţia f_1 este continuă pe [-π, π] şi chiar $f_1\in C^1([-\pi,\pi])$ deci este dezvoltabilă în serie Fourier; în aceste condiţii f este dezvoltabilă în serie Fourier pe (-π, π) şi în x = -π, x = π suma seriei Fourier este:

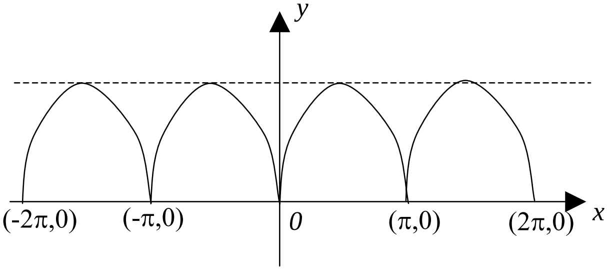
$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{e^{\pi}+e^{\pi}}{2}=e^{\pi}$. Coeficienţii Fourier se calculează direct:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x dx=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}; a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\cos nxdx=(-1)^n\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}, \forall n\geq 1$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^x\sin nxdx=(-1)^{n+1}\frac{n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \forall n\geq 1$$

(Calculul integralelor lui a_n şi b_n se face prin metoda integrării prin părţi). Are loc egalitatea:

$$e^x=\begin{cases}\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\cdot\left[\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right]; x\in(-\pi,\pi)\\ \dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}=\dfrac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\left[\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}\right], x=\pi, x=-\pi\end{cases}.$$



5) $f(x)=|\sin x|, x\in[-\pi,\pi]$

f este continuă, netedă pe porţiuni şi funcţie pară, deci avem:

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{4}{\pi}, a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx=-2\dfrac{(-1)^n+1}{\pi(n^2-1)}; n\geq 2\\ a_1=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=0, a_n=\begin{cases}\dfrac{-4}{\pi(2k)^2-1}, n=2k,(k\geq 1)\\ 0; n=2k+1\end{cases}\\ b_n=0,(n\geq 1)\end{cases}$$

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\frac{\cos 6x}{35}+\ldots+\frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1}+\ldots\right), x\in[-\pi,\pi]$$

6) $f(x)=\sin ax, x\in[-\pi,\pi]$ şi $a\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}$; f este funcţie continuă şi impară, deci avem:

$$a_n=0,(n\geq 0), b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx dx=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{n(-1)^n}{a^2-n^2};$$

$$\sin ax=\frac{2}{\pi}\sin a\pi\sum_1^{\infty}\frac{n(-1)^n}{a^2-n^2}\sin nx, \forall x\in(-\pi,\pi)$$

7) $f(x) = \cos ax, x \in [-\pi, \pi]$ şi $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$; f este funcție continuă şi pară, deci avem:

$$b_n = 0, (n \geq 1); a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{2\sin a\pi}{a\pi}; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx =$$

$$= \frac{4(-1)^n \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)} \Rightarrow \cos ax = \frac{2}{\pi}\sin a\pi\left[\frac{1}{2a} + 2a\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}\cos nx\right], \forall x \in [-\pi, \pi].$$

8) $f(x) = e^{ax}, x \in [-\pi, \pi], a \neq 0$ este funcție continuă şi derivabilă, avem:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{\pi a}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right); a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right) \cdot \frac{a(-1)^n}{a^2 + n^2}, (\forall n \geq 1); b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right) \cdot \frac{n(-1)^{n+1}}{a^2 + n^2}, \forall n \geq 1$$

$$e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2 + n^2}\left(a\cos nx - n\sin nx\right)\right], \forall x \in (-\pi, \pi)$$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi}$$

5. Aproximarea funcțiilor continue prin polinoame trigonometrice

Fie dat un polinom trigonometric oarecare:

$$\text{(VI.51)} \quad \begin{cases} T_n(x) = \dfrac{c_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(c_k \cos kx + d_k \sin kx\right) \\ c_0, c_k, d_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

şi o funcţie $f:[-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ integrabilă Riemann şi cu f^2 integrabilă Riemann pe $[-\pi, \pi]$ (adică, f "**o funcţie de pătrat integrabilă**" pe $[-\pi, \pi]$) atunci asociem lui f o nouă normă:

(VI.52) $\|f\| \overset{def}{=} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx}$

care verifică axiomele:

(N_1) $\|f\| \geq 0$ şi $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0\ \forall x \in [-\pi, \pi]$;

(N_2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;

(N_3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Să stabilim în ce mod pot aproxima cel mai bine polinoamele trigonometrice T_n din (VI.51) o funcţie f pe $[-\pi, \pi]$. În acest sens definim "**Abaterea medie pătratică**" prin expresia:

(VI.53) $\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - T_n(x) \right]^2 dx = \left\| f(x) - T_n(x) \right\|^2$

şi cerem ca aceasta să admită o valoare minimă.

Se poate demonstra că valoarea minimă pentru abaterea medie pătratică are loc în cazul când $T_n(x) = S_n(x)$ unde $S_n(x)$ este suma parţială a seriei Fourier asociată lui f:

(VI.54) $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ cu :

$$\begin{cases} a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos px\,dx;\ p \geq 0 \\ b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin px\,dx;\ p \geq 1 \end{cases}.$$

Atunci rezultă din (VI.53):

(VI.55) valoarea minimă $\Delta_n \overset{notat}{=} \delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - S_n(x) \right]^2 dx = \left\| f(x) - S_n(x) \right\|^2$

Prin calcul direct se obține:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - S_n(x) \right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f^2(x) - 2f(x)S_n(x) + S_n^2(x) \right] dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx -$$

$$-2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right]^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - 2\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \right]^2 \right\} dx$$

$\Rightarrow$ folosind formulele deja demonstrate (1), (2), (3), (4) rezultă:

(VI.55') $\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - S_n(x) \right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right] \geq 0$

şi în final avem:

(VI.56) $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \forall n \in \mathbf{N}^*$

numită "**inegalitatea lui Bessel**", care stabileşte o legătură între o funcție f integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ şi primii $(2n + 1)$ coeficienți Fourier: $a_0, a_1, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Inegalitatea (VI.56) este valabilă pentru orice număr natural n, în consecință ea are loc şi pentru $n \to \infty$, deci avem:

(VI.57) $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$.

În particular, rezultă că dacă seria cu termenul general $\left(a_k^2 + b_k^2 \right)$ este convergentă, atunci în mod necesar termenul său general $\left(a_n^2 + b_n^2 \right) \xrightarrow{\mathbf{R}} 0$

şi deci $a_n \xrightarrow{\mathbf{R}} 0$, $b_n \xrightarrow{\mathbf{R}} 0$ pentru $n\to\infty$, o proprietate deja demonstrată pentru şirul coeficienţilor Fourier $\left(a_n\right)_{n\geq 0}, \left(b_n\right)_{n\geq 1}$.

Observaţii:

1) Relaţiile (VI.56) şi (VI.57) arată că şirul de coeficienţi Fourier ai unei funcţii f integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ nu este un şir arbitrar de numere reale, ci un şir pentru care seria pătratelor termenilor este o serie numerică convergentă; în particular, şirul de coeficienţi Fourier tinde la zero în **R**.

2) Răspunsul este negativ la problema:

IV. Dată o serie trigonometrică, există o funcţie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ care admite seria dată ca serie Fourier asociată ?

Din consideraţiile de mai sus: dat un şir de numere reale a_0, a_1,b_1, ..., a_n, b_n... pentru care seria pătratelor termenilor este convergentă nu există totdeauna o funcţie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ care să admită drept coeficienţi Fourier şirul dat.

3) Noţiunea de "**coeficient Fourier**" şi cea de "**serie Fourier**" au fost definite folosind integrala Riemann; răspunsurile negative la unele întrebări se datorează faptului că integrala Riemann cu care lucrăm în aceste cazuri, este o integrală particulară.

4) Vom introduce un concept mai general de integrală "**Integrala Lebesgue**" cu ajutorul căreia se vor da răspunsuri la cele mai multe probleme fundamentale din "**Teoria seriilor trigonometrice**" şi în particular, din "**Teoria seriilor Fourier**".

5) Vom indica teoreme de aproximare uniformă a funcţiilor continue prin polinoame trigonometrice.

Teorema VI.42.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, periodică cu $T = 2\pi$ şi

$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ suma parțială a seriei Fourier asociată lui *f*, atunci şirul de polinoame trigonometrice $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ cu :

$\sigma_n=\frac{S_0(x)+S_1(x)+...+S_{n-1}(x)}{n}$ este uniform convergent pe **R** către *f*.

Demonstrație:

Fie $x\in\mathbf{R}$ fixat, avem: $S_0(x)=\frac{a_0}{2}$ şi pentru:

$$S_p(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{p}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{p}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]dy=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{p}\cos k(y-x)\right]dy\Rightarrow \text{folosind:}$$

$D_n(x)=\frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\right),\forall x\in\mathbf{R}-2\pi\mathbf{Z},\forall n\in\mathbf{N}$ unde nucleul Dirichlet

$D_n(x)\overset{def}{=}\frac{\sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{2\pi\sin\frac{x}{2}}$, avem: $S_p(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(y)\frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)(y-x)}{2\sin\frac{y-x}{2}}dy$.

Vom folosi proprietățile integralei Riemann pentru a găsi o exprimare a lui $S_p(x)$ cu $p\geq 1$:

$$S_p(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} = \frac{1}{\pi}\underset{\substack{\Uparrow\\ x=y+2t}}{\int_{x-\pi}^{x}} + \frac{1}{\pi}\underset{\substack{\Uparrow\\ x=y+2t}}{\int_{x}^{x+\pi}} = -\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(x-2t)\frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}dt$$

$$\Rightarrow S_p(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}dt \text{ cu } p\ge 0$$

Pentru $\forall x\in\mathbf{R}$ şi $\forall n\ge 1$, avem: $\sigma_n=\frac{1}{n}\left[S_0(x)+S_1(x)+...+S_{n-1}(x)\right]=$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\frac{\sin t+\sin 3t+...+\sin(2n-1)t}{\sin t}dt \Rightarrow$$

$$\left(\sin t+\sin 3t+...+\sin(2n-1)t=\frac{\sin nt}{\sin t}\right)$$

$$(*)\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \text{ cu } n\ge 1$$

Pentru $f(x)=1$, $\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow a_0=2$, $a_n=0$ şi $b_n=0$, $\forall n\ge 1$ deci:

$\sigma_n=\frac{S_0+S_1+...+S_{n-1}}{n}=\frac{n}{n}=1$ şi din relaţia (*) avem:

$1=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt, \forall n\ge 1$ din care prin înmulţirea cu $f(x)$ rezultă:

$$(**)\ f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2f(x)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Din (*) şi (**) se obţine pentru $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall n\ge 1$:

$$\left|\sigma_n(x)-f(x)\right|=\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\right]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x,t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right|\le\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\varphi(x,t)\right|\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

unde $\varphi(x,t)=f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)$. Fixăm $x\in\mathbf{R}$ şi $\varepsilon>0$ arbitrar fixat. Cum f este funcție continuă pe $\mathbf{R}\Rightarrow f$ continuă pe compactul $[x-\pi, x+\pi]$, deci f uniform continuă pe acest compact şi conform definiției: $\varepsilon>0$ (fixat), există $\delta(\varepsilon)$ cu $0<\delta(\varepsilon)<\pi$ a. î. pentru:

$\forall x', x''\in[x-\pi, x+\pi]$ cu $\left|x'-x''\right|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Pentru

$t\in\left[0,\frac{\delta}{2}\right]$ şi $x, x+2t, x-2t\in[x-\pi, x+\pi]$, avem:

$\left|\varphi(x,t)\right|\le\left|f(x+2t)-f(x)\right|+\left|f(x-2t)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ din care se obține:

$$\left|\sigma_n(x)-f(x)\right|\le\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\varphi(x,t)\right|\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\delta}{2}}\left|\varphi(x,t)\right|\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt+$$

$$\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\varphi(x,t)\right|\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt=I_1+I_2$$

Cum f continuă pe $\mathbf{R}\Rightarrow f$ mărginită şi notăm: $M=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\left|f(x)\right|=\|f\|_\infty$ şi

$C_1=\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin^2 t},\left(C_1\in\mathbf{R}^*\right)$. Avem:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\delta}{2}} |\varphi(x,t)| \left(\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \le \dfrac{\varepsilon}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \\ 1 = \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \Leftrightarrow 2n\pi = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 \le \dfrac{\varepsilon}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\delta}{2}} \left(\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \le \dfrac{\varepsilon}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ I_2 = \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(x,t)| \left(\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \le \dfrac{4M}{n\pi} C_1 \end{cases} \Rightarrow$$

pentru orice $n \in \mathbf{N}$ suficient de mare avem: $I_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}, I_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ şi atunci:

$\left|\sigma_n(x) - f(x)\right| \le I_1 + I_2 < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in \mathbf{R}$ deci $\sigma_n \xrightarrow[\mathbf{R}]{uc} f$.

Teorema VI.43.(Teorema lui Weierstrass de aproximare prin polinoame trigonometrice)

Orice funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă, periodică cu T = 2π se aproximează prin polinoame trigonometrice (adică pentru ∀ε>0 există un polinom trigonometric $T_\varepsilon(x)$ astfel încât $\| f - T_\varepsilon\| < \varepsilon$) .

Demonstraţie: După teorema VI.42 avem: $\sigma_n \xrightarrow[\mathbf{R}]{uc} f$ şi atunci pentru ∀ε>0 există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ a. î. $\| f - \sigma_n\| < \varepsilon$ pentru $\forall n \ge n_\varepsilon$ şi $\forall x \in \mathbf{R}$; se consideră polinomul trigonometric $T_\varepsilon(x) = \sigma_{n_\varepsilon}(x)$ şi teorema este demonstrată.

Consecința VI.13.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă, periodică cu T = 2π ($f(\pi) = f(-\pi)$) şi $a_0, a_1, ..., a_n, ..., b_1, b_2, ..., b_n...$ sau $a_0, a_1, b_1,..., a_n, b_n...$ şirul coeficienților Fourier ai funcției f, atunci are loc egalitatea:

(VI.58) $$\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + ... + a_n^2 + b_n^2 + ... = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

numită "**egalitatea lui Parseval**" (sau "**egalitatea Parseval - Leapunov**").

Demonstrație: După teorema lui Weierstrass (teorema VI.43) există un şir de polinoame trigonometrice $\left(T_n(x)\right)_{n\geq 1}$ convergent uniform pe **R** către f, deci: $\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbf{N}$ a. î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \forall x\in\mathbf{R}$. Alegem $\varepsilon < 1$, atunci vom avea şi inegalitatea: $|f(x) - T_n(x)|^2 < \varepsilon, \forall x\in\mathbf{R}$ şi $\forall n \geq n_\varepsilon$, care prin integrare conduce la: (*) $\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2 dx \leq 2\pi\varepsilon$.

Dacă F_n este polinomul Fourier de grad n asociat lui f, folosind (VI.53), avem:

(*) $\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-F_n(x)\right]^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-T_n(x)\right]^2 dx < 2\pi\varepsilon$ din (VI.55') rezultă:

$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + ... + a_n^2 + b_n^2\right] \leq 2\pi\varepsilon \Rightarrow \forall n\in\mathbf{N}$ şi se obține

(**) $0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right] \leq 2\pi\varepsilon$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar de mic, şi diferența din dubla inegalitate (**) nu depinde de ε, se obține:

$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right]$ (VI.58).

Observații:

1) Formula lui Parseval (VI.58) este o generalizare a teoremei lui Pitagora într-un spațiu euclidian n – dimensional ($\overline{a} \perp \overline{b} \Rightarrow \left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2$, în general, $\left(\overline{a}_1+\overline{a}_2+...+\overline{a}_k\right)^2 = \overline{a}_1^2+\overline{a}_2^2+...+\overline{a}_k^2$ cu $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ vectori ortogonali doi câte doi dintr-un spațiu euclidian n – dimensional).

2) **Identitatea lui Parseval** se mai numeşte "**ecuația închiderii**" (relația (VI.58)) care afirmă că: sistemul trigonometric fundamental (VI.38) este pe [-π, π] un sistem ortogonal complet (nu există nici o funcție identic nulă f care să fie ortogonală cu o funcție din sistemul trigonometric fundamental) în raport cu familia funcțiilor continue şi periodice cu T = 2π pe **R**.

3) Dacă f şi g sunt continue pe [-π, π] cu şirurile coeficienților Fourier: $a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n ...$ şi respectiv $a_0', a_1', b_1', ..., a_n', b_n' ...$ şi avem: $a_n = a_n'$ pentru $n \geq 0$, $b_n = b_n'$ pentru $n \geq 1$, atunci $f \equiv g$ pe [-π, π].

4) Vom demonstra o teoremă care dă un răspuns parțial la problemele I, II, III din "**Teoria seriilor Fourier**".

Teorema VI.44.

Fie f: **R** → **R** o funcție periodică cu T = 2π. Dacă $f \in C^1(\mathbf{R})$, atunci avem:

(i) Seria Fourier asociată lui f converge uniform şi absolut pe **R**.

(ii) Suma seriei Fourier asociată lui f este egală cu f, deci $f(x) = S(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație:

Fie $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ cu $n \geq 0$ şi $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$ cu $n \geq 1$ coeficienții Fourier ai funcției f, iar $\alpha_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx$ cu $n \geq 0$ şi

$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx$ cu $n \geq 1$ coeficienții Fourier ai funcției f'. Vom calcula a_n şi b_n folosind de la metoda integrării prin părți, deci:

$$\begin{cases} \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \left.\frac{f(x)\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = \frac{-\pi}{n}\beta_n \\ \qquad (f(\pi) = f(-\pi)) \\ \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = -\left.\frac{f(x)\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{\pi}{n}\alpha_n \\ \qquad (f(\pi) = f(-\pi)) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{\beta_n}{n}(n \geq 1) \text{ şi } b_n = \frac{\alpha_n}{n} \Rightarrow (*) \begin{cases} |a_n| = \frac{|\beta_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \\ |b_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \\ (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 \\ \forall x, y \in \mathbf{R} \end{cases}$$

După inegalitatea Bessel aplicată lui f', avem:

$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_1^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)]^2 dx \Rightarrow$ seria $\sum_1^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ este convergentă şi cum $\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă din (*) rezultă:

(**) $|a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right), \forall n \geq 1$ deci seria $\sum_1^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ este convergentă. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem:

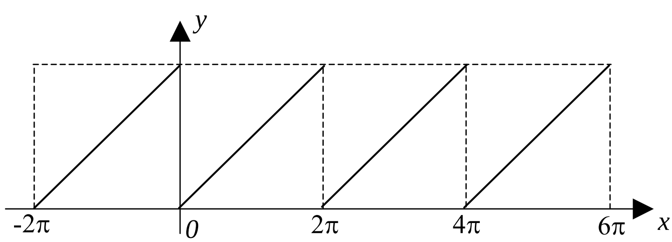
$$\left|a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \le \left|a_n\right|\left|\cos nx\right| + \left|b_n\right|\left|\sin nx\right| \le \left|a_n\right| + \left|b_n\right|, \forall n \ge 1 \Rightarrow$$

după criteriul lui Weierstrass seria de funcții: $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$

este uniform şi absolut convergentă pe **R**.

Notăm suma seriei cu g: **R** $\rightarrow$ **R**: $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$, $\forall x \in$ **R** şi cum seria este uniform convergentă pe **R**, atunci $a_0, a_n, b_n \left(n \ge 1\right)$ sunt coeficienții Fourier ai funcției g. Prin ipoteză: $a_0, a_n, b_n \left(n \ge 1\right)$ sunt coeficienții Fourier ai funcței f continuă şi periodică cu T = 2π, atunci g este o funcție continuă şi periodică cu T = 2π (suma unei serii uniform convergentă) şi după o teoremă deja demonstrată, avem $f \equiv g$ pe **R**.

Exerciții:



9) $f(x) = x$, $x \in (0, 2\pi)$ nu este nici pară nici impară; graficul construit pe $(0, 2\pi)$ se prelungeşte prin periodicitate la **R** cu $x_k = 2k\pi$ ($k \in$ **N**) puncte de discontinuitate de specia I şi după teorema VI.38 seria are în aceste puncte suma: $S\left(x_k\right) = \frac{f\left(2k\pi - 0\right) + f\left(2k\pi + 0\right)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi$. Coeficienții Fourier ai lui $f(x) = x$, sunt:

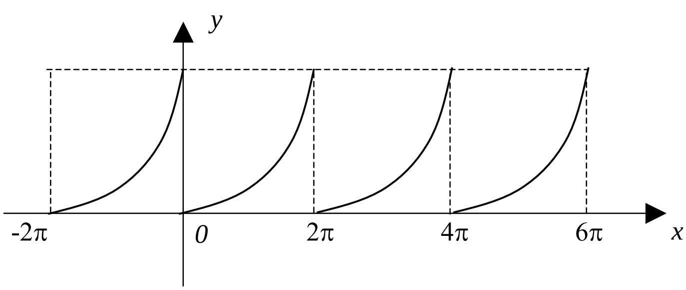
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{x}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = 0, n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = \frac{x}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx = \frac{-2}{n}, n = 1,2,...$$

Avem: $x = \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + ...\right), \forall x \in (0, 2\pi)$.

10) $f(x) = x^2$, $x \in (0, 2\pi)$ nu este nici pară nici impară; graficul construit pe $(0, 2\pi)$ se prelungeşte prin periodicitate la **R** cu $x_k = 2k\pi$ ($k \in$ **N**) puncte de discontinuitate de specia I şi după teorema VI.38 seria are în aceste puncte suma: $S(x_k) = \frac{f(2k\pi - 0) + f(2k\pi + 0)}{2} = \frac{0 + 4\pi^2}{2} = 2\pi^2$. Coeficienții Fourier ai lui $f(x) = x^2$, sunt:



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx = x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}[x\cos nx]\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx dx = \frac{4}{n^2}, n = 1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx dx = -\frac{x^2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{4\pi}{n} -$$

$$-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx dx = \frac{-4\pi}{n}, n = 1,2,...$$

Avem:

$$x^2=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right)=\frac{4\pi^2}{3}+$$

$$+4\left(\cos x-\pi\sin x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\pi\sin 2x}{2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}+\ldots\right),\forall x\in(0,2\pi)$$

11) Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbf{R}$ şi $a\neq 0$ se cere:

I. Seria Fourier asociată lui f pe $(-\pi, \pi)$;

II. Seria Fourier asociată lui f pe $(0, 2\pi)$.

I. În exemplele 1) şi 3) am determinat seria Fourier:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2},\forall x\in(-\pi,\pi) \text{ şi:}$$

$$x=2\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\forall x\in(-\pi,\pi) \text{ de unde rezultă:}$$

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\frac{\pi^2}{3}+c+4a\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}-2b\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx,$$

$\forall x\in(-\pi, \pi)$.

II. Din exemplele 9) şi 10) se obţine:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\frac{4\pi^2}{3}+b\pi+c+4a\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-(4\pi a-2b)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,$$

$\forall x\in(-\pi, \pi)$.

12) Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri funcţia:

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{l};0\le x\le\frac{l}{2}\\ 0;\frac{l}{2}<x<l\end{cases}$$ care are o prelungire pară şi periodică pe $(-l, 0]$

şi atunci se obţine o funcţie de perioadă $2l$. După formulele (VI.49), avem:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{\pi};a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx=$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx \text{ şi notând } \begin{cases}\dfrac{\pi x}{l}=t\\ dx=\dfrac{l}{\pi}dt\end{cases} \text{ se obține :}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos(n+1)t+\cos(n-1)t\right]dt$$

cu:

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t+1)\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin 2t}{2}+t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1}+\frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\begin{cases}0;n=2k+1 \text{ şi } n>1\\ -\dfrac{2(-1)^k}{\pi\left(4k^2-1\right)};n=2k \text{ şi } k\geq 1\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l\cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx=0$$ (după 4° din teorema VI.34); n = 1, 2, ... Avem:

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{l};0\leq x\leq\dfrac{l}{2}\\ 0;\dfrac{l}{2}<x<l\end{cases}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{2\pi nx}{l},\forall x\in[0,l)\cdot$$

13) Să se dezvolte în serie Fourier de sinusuri funcția:

$$f(x)=\begin{cases}x;0\leq x\leq\dfrac{l}{2}\\ l-x;\dfrac{l}{2}<x\leq l\end{cases}$$ care are o prelungire impară şi periodică pe (-l, 0]

şi se obține o funcție de perioadă 2l. După formulele (VI.49), avem:

$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = 0$ (prin calcul direct după teorema VI.34) cu $n = 0, 1, ...;$

$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{\pi n x}{l}dx + \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$ și prin substituția: $\frac{\pi x}{l} = t;$ cu $dx = \frac{l}{\pi}dt$ se obține:

$$b_n = \frac{2l}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin ntdt + \frac{2l}{\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\sin ntdt = \frac{2l}{\pi^2}\left(\frac{-t\cos nt}{n}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2l}{\pi^2 n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos ntdt +$$

$$+\frac{2l}{\pi^2}\left(-\frac{(\pi - t)\cos nt}{n}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2l}{n\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos ntdt = \frac{4l}{n^2\pi^2}\frac{\sin n\pi}{2}$$

cu $\frac{\sin n\pi}{2} = \begin{cases} 0; n = 2k \\ (-1)^k; n = 2k+1 \end{cases}$. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} x; 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ l - x; \frac{l}{2} < x < l \end{cases} = \frac{4l}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l} + ...\right] =$$

$$= \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}, \quad \forall x \in [0, l).$$