

# Controlabilitate, Stabilizare și Probleme Inverse pentru Sisteme Parabolice

Elena-Alexandra Melnig

Școala Doctorală a Facultății de Matematică, Universitatea “Al. I. Cuza” Iași

## ABSTRACT

Se prezintă rezultatele obținute în teza de doctorat, teză ce a fost elaborată sub îndrumarea profesorului Cătălin-George Lefter de la Facultatea de Matematică, Universitatea “Al. I. Cuza” din Iași.

Această teză este dedicată studiului ecuațiilor și sistemelor de ecuații parabolice în contextul problemelor de controlabilitate, stabilizare și al problemelor inverse. Sistemele parabolice apar ca modele de evoluție pentru fenomene ale lumii reale: procese de reacție-difuzie, propagarea căldurii, tranziții de fază, dinamica populației, etc. Problemele de control pe care le abordăm vizează controlabilitatea exactă sau stabilizarea feedback a acestor sisteme. În ce privește problemele inverse, în teză se studiază estimări de stabilitate pentru sursă, cu observații parțiale în subdomenii.

Controlabilitatea se referă la găsirea unui control potrivit, care poate fi control distribuit sau frontieră, și care, pentru două stări precizate, inițială respectiv finală, conduce sistemul din starea inițială în starea finală dorită într-un timp precizat. În aceasta teză vom considera controale interne care acționează doar în unele dintre ecuațiile sistemului.

Există situații în care poate fi mai util din punct de vedere al aplicațiilor să se găsească un control în formă feedback care să stabilizeze sistemul în jurul unei stări staționare. Aceasta înseamnă că sistemul controlat feedback este asimptotic stabil într-o vecinătate a stării staționare de referință.

În ambele cazuri, o etapă importantă este studiul problemei respective pentru sistemul linearizat. Controlabilitatea în cazul sistemelor liniare este strâns legată de estimările de observabilitate de tip Carleman. Stabilirea unor estimări Carleman potrivite problemelor de control este unul dintre subiectele centrale ale acestei teze. În ce privește problemele de stabilizare vom utiliza rezultate mai slabe decât estimările de observabilitate, rezultate care se referă la proprietăți de unică continuare.

O altă clasă de probleme unde estimările Carleman sunt un instrument fundamental sunt estimările de stabilitate în probleme inverse. Studiem estimări de stabilitate pentru sursă în spații  $L^p$ , mai precis stabilim estimări ale normelor  $L^p, p \geq 2$  ale sursei unui sistem parabolic în funcție de normele  $L^p$  ale unor componente ale soluției observate într-un subdomeniu.

Teza este structurată în cinci părți, primele patru conținând rezultatele originale obținute. Ultima parte este dedicată prezentării unor instrumente importante și a unor rezultate clasice în analiza și controlul ecuațiilor parabolice, la care se face referire sau pe care se sprijină dezvoltarea ideilor din capitolele anterioare.

Prima parte a tezei este dedicată problemelor de stabilizare.

În primul capitol studiem un sistem parabolic semiliniar, de două ecuații, cu un control distribuit într-un subdomeniu ce acționează simultan în ambele ecuații. Studiem stabilizarea locală, iar abordarea se bazează pe controlabilitatea aproximativă a sistemului liniarizat și folosirea de norme obținute utilizând soluția unei ecuații Lyapunov. Aplicațiile se referă la sisteme de reacție-difuzie.

Al doilea capitol se adresează stabilizării feedback a unui sistem parabolic, în dimensiune spațială unu, cu ecuații cuplate în termeni de ordin zero și unu, în care  $m$  controale acționează prin intermediul unei matrice de control  $B$ . Obținerea rezultatului se bazează pe aproximativa controlabilitate a sistemului liniarizat care, la rândul său, este legată de proprietatea de unică continuare pentru sistemul adjunct. În ce privește proprietatea de unica continuare, când cuplajele sunt constante, stabilim condiții algebrice de tip Kalman. Stabilizarea sistemului neliniar se bazează și în acest caz pe folosirea normelor construite utilizând soluții ale unor ecuații Lyapunov potrivite.

A doua parte a tezei conține un capitol ce vizează chestiuni de controlabilitate a sistemelor parabolice cu mai puține controale decât ecuații. Considerăm sisteme de ecuații parabolice cuplate în termeni de ordin zero, cu cuplaje de tip stea sau arbore, iar controlul intern, distribuit într-un subdomeniu, acționează doar într-o singură ecuație. Obținem un rezultat de exactă controlabilitate locală la o soluție staționară, în ipoteze privind suporturilor coeficienților de cuplaj în sistemul liniarizat. Punctele principale ale studiului sunt estimările Carleman potrivite pentru sisteme liniare cu cuplaje de tip stea sau arbore și trecerea de la rezultatul de controlabilitate pentru sistemele liniare la sistemul neliniar prin intermediul Teoremei de punct fix a lui Kakutani aplicată într-un cadru  $L^\infty$  al problemei.

A treia parte a tezei conține două capitole și este dedicată estimărilor de stabilitate pentru sursă în problemele inverse.

În primul capitol al acestei părți considerăm sisteme liniare de ecuații parabolice cuplate în termeni de ordin zero și unu. Demonstrăm estimări de stabilitate Lipschitz în norme  $L^q$ ,  $2 \leq q \leq \infty$  pentru sursă, în funcție de norme corespunzătoare ale soluției într-un subdomeniu. Instrumentul principal este o familie de estimări Carleman cu ponderi generale, în spații Lebesgue, pentru sisteme parabolice neomogene.

Considerăm în următorul capitol sisteme liniare și semiliniare de ecuații parabolice cuplate în termeni de ordin zero, cu condiții omogene la frontieră și surse pozitive. Obținem o altă familie de inegalități Carleman în spații  $L^q$ ,  $q \in [2, \infty)$ , ceva mai ușor de utilizat, și le folosim pentru a obține estimări în norme  $L^q$  și  $L^\infty$  ale sursei în funcție de soluția observată într-un subdomeniu. Diferența în raport cu capitolul precedent se referă la studiul problemelor semilinare și la clasa de surse pentru care se obțin estimările de stabilitate, surse care acum aparțin conului funcțiilor pozitive. Un punct important în demonstrație face referire la proprietățile de invarianță ale fluxului și la principii de maxim pentru sisteme parabolice. Aplicații ale unor astfel de estimări sunt pentru sistemele de reacție-difuzie.

În partea a patra, care conține un singur capitol, discutăm diferite aspecte legate de regularitatea soluțiilor problemelor parabolice, cu consecințe ce privesc scufundările de tip Sobolev pentru spații Sobolev anisotrope. Folosim astfel de rezultate în argumente de bootstrap pentru a obține estimări Carleman globale, în spații  $L_t^q(L_x^p)$ , pentru ecuații parabolice neomogene, estimări ce sunt fundamentale în probleme de control sau probleme inverse asociate. Argumentele folosite în demonstrații sunt caracterizări ale regularității în termeni de domenii de puteri fracționare ale operatorilor eliptici, caracterizări ale acestor domenii ca spații de interpolare și legătura acestora cu spațiile Bessel și Sobolev-Slobodeckii.

Rezultatele obținute în teză compun următoarele articole ce au fost publicate sau sunt trimise spre publicare:

- Cătălin-George Lefter, Elena-Alexandra Melnig, *Feedback stabilization with one simultaneous control for systems of parabolic equations*, Mathematical Control and Related Fields, September 2018, 8(3& 4): 777-787. doi: 10.3934/mcrf.2018034;
- Cătălin-George Lefter, Elena-Alexandra Melnig, *On the parabolic regularity, Sobolev embeddings and global Carleman estimates in  $L^q(L^p)$  spaces*, Pure and Applied Functional Analysis, Vol. 5, No. 5, 1095-1113, 2020.
- Elena-Alexandra Melnig, *Stability in  $L^q$ -norm for inverse source parabolic problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, <https://doi.org/10.1515/jiip-2019-0081>;
- Elena-Alexandra Melnig, *Stability in inverse source problems for nonlinear reaction-diffusion systems*, trimisă spre publicare în Nonlinear Differential Equations and Applications;
- Elena-Alexandra Melnig, *Internal feedback stabilization for parabolic systems coupled in zero or first order terms*, Evolution Equations and Control Theory, doi: 10.3934/eect.2020069.
- Cătălin-George Lefter, Elena-Alexandra Melnig, *Internal controllability of parabolic systems with star and tree like couplings*, trimisă spre publicare în Applied Mathematics and Optimization.