Reducere local conform simplectică

Prezentare a unor rezultate din teza de doctorat susţinută în septembrie 2019

Miron-Ion Stanciu[1]

Conducător științific: **Prof. Dr. Liviu Ornea**

Școala doctorală de Matematică, Universitatea din Bucureşti

1 Subiectul tezei

Teza mea şi-a propus studierea proprietăților geometrice ale varietăților local conform simplectice (pe scurt, LCS) și, într-o mai mică măsură, a varietăților local conform Kähler (LCK). În prezentarea de la acest colocviu voi discuta despre cea mai consistentă parte a tezei, bazată pe [S1] și [S2].

Varietățile LCS sunt câturi ale unor varietăți simplectice printr-un grup discret de omotetii. Produse ale varietăților de contact cu S^1 sunt LCS ([V]), dar există multe alte tipuri de exemple. Echivalent, sunt varietăți de dimensiune pară înzestrate cu o 2-formă nedegenerată ω și o 1-formă închisă θ (numită forma Lee), astfel încât

$$d\omega = \theta \wedge \omega.$$

Varietățile LCK îmbină definiția de mai sus cu existența atât a unei structuri complexe, cât și a unei structuri Riemanniene *i.e.* cerem ca ω de mai sus să fie o 2-formă dată de o metrică Riemann compusă cu endomorfismul structurii complexe.

Interesul pentru varietățile LCS este în creștere, atât în privința geometriei, cât și a topologiei lor (*e.g.* [Ba], [CM] și referințele pe care le conțin). O motivație puternică pentru studiul varietăților LCS este un rezultat recent al lui Eliashberg și Murphi [EM] care arată că toate varietățile compacte aproape complexe cu 1-coomologie întreagă netrivială au structuri LCS, deci aceste varietăți sunt mult mai numeroase ca cele simplectice.

2 Rezultate cunoscute anterior

Reducerea Marsden-Weinstein a varietăților simplectice este o procedură clasică și bine-cunoscută (vezi [AM, pp. 298-299], [Br, cap. 7]) prin care, dată fiind o acțiune Poisson a unui grup Lie pe o varietate simplectică, se pot produce alte varietăți simplectice sub formă de câturi ale mulțimilor de nivel ale aplicației moment. De la introducere, această idee generală a fost aplicată multor structuri geometrice (de contact, Kähler etc.).

S. Haller and T. Rybicki ([HR1]) au adaptat această reducere simplectică la varietăți LCS, și construcția lor a fost folosită în [MTP] pentru a obține modele universale pentru mai multe tipuri de varietăți LCS. Calea aleasă în [HR1] a fost să rețină ideea de a factoriza la acțiunea grupului în sine; în cazul general, însă, aceasta înseamnă că mulțimile de nivel ale aplicației moment nu mai satisfac ipotezele impuse.

3 Conținutul tezei. Rezumat al rezultatelor originale

În capitolul cel mai consistent al tezei, bazat pe [S1], adaptez reducerea simplectică la varietățile LCS într-o manieră naturală făcând, într-un anumit sens, opusul reducerii definite de [HR1]: voi factoriza mulțimile de nivel ale aplicației moment, ca și în cazul simplectic, dar nu prin acțiunea grupului, ci de-a lungul foliației obținută prin „twistarea” acțiunii grupului. Acest procedeu revine la reducerea simplectică uzuală dacă forma Lee θ este zero.

[1] Institute of Mathematics “Simion Stoilow” of the Romanian Academy
Calea Grivitei Street, 010702, Bucharest, Romania
miron.stanciu@imar.ro; mirostnc@gmail.com

Reducerea descrisă mai sus poate produce un mare număr de varietăți LCS, variind fie valoarea regulată, fie forma LCS în propria clasă conformă.

Cel mai important, demonstrez și că, în prezența unor ipoteze adiționale, construcția mea este compatibilă cu existența unei structuri complexe *i.e.* dacă varietatea M este LCK, varietatea redusă rezultată este, de asemenea, LCK.

Această teoremă poate fi folosită în contextul geometriei de contact. Folosind relația dintre varietățile de contact și LCS, ajung la (și obțin o nouă demonstrație pentru) o metodă de reducere de contact care funcționează pentru orice valoare regulată a aplicației moment, care se dovedește a produce același rezultat ca cea definită de Albert ([A]). De vreme ce am prezentat această reducere ca fiind în mod natural legată de cea LCS, ea pare a fi cea mai firească dintre metodele existente pentru reducerea de contact nenulă. Drept consecință secundară, ne este furnizată o mare clasă de exemple de varietăți reduse.

În capitolul final al tezei, mă ocup de clasa de varietăți LCS pe care am studiat în cel mai mare detaliu efectele reducerii LCS, anume cea a fibratelor cotangente.

Structura canonică simplectică pe fibratul contangent al oricărei varietăți diferențiabile are un fel de proprietate de universalitate în raport cu reducerea. Anume, dacă un grup G acționează pe o varietate Q astfel încât spațiul factor Q/G este varietate, acțiunea poate fi în mod natural ridicată la o acțiune Hamiltoniană pe fibratul cotangent T^*Q și reducerea la 0 a lui T^*Q este simplectomorfă cu fibratul cotangent $T^*(Q/G)$. Făcând reducerea la valori regulate nenule ale aplicației moment, acest simplectomorfism devine o scufundare simplectică (vezi [MMOPR]).

Pe de altă parte, fibratul cotangent al unei varietăți are multe structuri LCS, date de alegerea unei 1-forme închise pe varietate (acest fapt a fost prima dată observat de [HR2]). Este naturală, deci, încercarea de a adapta teoremele de reducere simplectică a cotangentului la universul LCS. O observație folositoare este că dacă un grup Lie acționează pe o varietate, determinând un fibrat principal, atunci acțiunea corespunzătoare pe fibratul cotangent are aceeași aplicație moment în raport cu structura simplectică, precum și cu orice structură LCS aleasă.

Principalul rezultat al acestui capitol este că teorema de reducere a fibratului cotangent este adevărată, în aceleași condiții, pentru structurile LCS ale fibratului cotangent, reduse ca în teorema principală pe care am demonstrat-o în capitolul precedent.

Pe lângă rezultatul în sine, existența teoremei de mai sus arată și naturalețea procedurii de reducere introdusă în această teză.

Bibliografie

[AM] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics, Second Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1978). (Cited on page 1.)

[A] C. Albert, *La théorème de réduction de Marsden-Weinstein en géométrie cosymplectique et de contact*, Journal of Geometry and Physics **6**, no.4 (1989), 627-649. (Cited on page 2.)

[Ba] G. Bazzoni, *Locally conformally symplectic and Kähler geometry*, EMS Surv. Math. Sci. 5 (1) (2018), 129-154. (Cited on page 1.)

[Br] R. Bryant, *An introduction to Lie groups and symplectic geometry*, Geometry and quantum field theory, IAS/Park City Math. Series 1, American Mathematical society (1995), 5-181. (Cited on page 1.)

[CM] B. Chantraine, E. Murphy, *Conformal symplectic geometry of cotangent bundles*, arXiv:1606.00861. (Cited on page 1.)

[EM] Y. Eliashberg, E. Murphy, *Making cobordisms symplectic*, arXiv:1504.06312. (Cited on page 1.)

[HR1] S. Haller, T. Rybicki, *Reduction for locally conformal symplectic manifolds*, Journal of Geometry and Physics **37** (2001), 262-271. (Cited on page 1.)

[HR2] S. Haller, T. Rybicki, *On the group of diffeomorphisms preserving a locally conformal symplectic structure*, Annals of Global Analysis and Geometry **17**, Issue 5 (1999), 475-502. (Cited on page 2.)

[MTP] J. C. Marrero, D. Martínez Tores, E. Padrón, *Universal models via embedding and reudction for locally conformal symplectic structures*, Ann. Global Anal. Geom. 40 (2011), no. 3, 311-337. (Cited on page 1.)

[MMOPR] J. Marsden, G. Misiołek, J-P. Ortega, M. Perlmutter, T. Rațiu, *Hamiltonian Reduction by Stages*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1913 (2007). (Cited on page 2.)

[S1] **M. Stanciu**, *Locally conformally symplectic reduction*, va apărea în Annals of Global Analysis and Geometry (2019). (Cited on page 1.)

[S2] **M. Stanciu**, *Locally conformally symplectic reduction of the cotangent bundle*, arXiv:1905.02798 (2019). (Cited on page 1.)

[V] I. Vaisman, *Locally conformal symplectic manifolds*, Int. J. Math. Math. Sci. **8** (3) (1985), 521-536. (Cited on page 1.)